

國民小學教師資格考試「數學能力測驗」之 數學教材教法評測知識類別與細目及比重分析

林碧珍*

本研究是利用我國國小教師資格考試「數學能力測驗」之數學教材教法歷屆考題的資料庫進行試題分析，以建立我國師資生國小數學教材教法的知識類別與細目，並分析各類別知識所佔比重。本研究先以文獻分析，形成教師教數學的專業知識分析架構，再分析歷屆國小數學教材教法試題。研究發現：我國國小師資生數學教材教法知識的評量架構包含：數學課程知識 4 項、分析學生數學認知知識 6 項和數學教學策略知識 8 項。從教師資格檢定試題分析得到的知識類別細目隱含著表示我國對於「先實後檢」的師資生教國小數學所須要具備的專業知識內涵。三類知識中，數學課程知識和分析學生數學認知知識所佔比重相當，而以數學教學策略知識比重最少，尤其是「挑選及安排學生解題的發表順序」及「依據學生的反應提出回饋」。本研究分析得到的國小數學教材教法知識類別與細目，可以作為未來「先檢後實」制度下的國小教師資格考試命題的參考，並作為國小數學科教材教法課程制定教學內容的指引，以及提供給師資生準備教檢考試的方向。

關鍵詞：師資生、國小教師資格檢定考試、教數學的專業知識、數學能力測驗、數學教材教法

* 林碧珍：國立清華大學數理教育研究所教授
(通訊作者：linpj@mx.nthu.edu.tw)

Mathematical Competency Test of the Elementary Teacher Certification Examination: Knowledge Domains, Specifications, and Distribution Percentage

Pi-Jen Lin*

The study was to explore the knowledge domains and specifications for teaching mathematics measured in the Mathematics Competency Test required in the Elementary Teacher Certification Examination, and the percentage distributed in each knowledge domain and specification. An analytical framework based on literature reviewed was constructed to analyze the items from the annual Mathematical Competency Test. The results showed that 18 specifications were distributed into three knowledge domains in the framework, consisting of four, six, and eight corresponding items to assess prospective teacher's knowledge of curriculum, knowledge of children's cognition, and pedagogical content knowledge, respectively. This framework implicitly signified the professional knowledge required for prospective teachers who have done the internship first and then take the certification examination in elementary school. Of the three domains, there were similar amount of items dedicated to the knowledge of curriculum and students' cognition domains, while the number of items were fewer for mathematical instruction. The items related to "selecting and sequencing students' various solutions" and "giving follow-up feedback to students' responses" were neglected in the Teacher Certification Examination. The specifications and domains of knowledge in the assessment framework could be used as a reference for future Teacher Certification Examinations in measuring prospective teachers who take the exam before their internship, according to the new preservice teacher educational policy. This framework can also serve as a guide for mathematics teaching methods courses required in preservice teacher program, and as a direction for prospective teachers preparing the Teacher Certification Examination.

Keywords: *knowledge for mathematical teaching, mathematical competence test, mathematics teaching and contents, Primary Teacher Qualification Examination, prospective or preservice teacher*

* Pi-Jen Lin: Professor, Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Tsing Hua University (corresponding author: linpj@mx.nthu.edu.tw)

國民小學教師資格考試「數學能力測驗」之 數學教材教法評測知識類別與細目及比重分析

林碧珍

壹、研究背景與目的

一位合格國小教師教數學究竟需要具備哪些面向的專業知識？要具備多少才夠？要如何評量？這些是國內外數學師資培育者長期關注的重要議題。臺灣自 1994 年頒佈《師資培育法》（1994），開放師資培育多元化以來，教育部為了維持各大學師資培育機構培育的師資素質，在培育、檢定及任用的制度與政策上，進行調整與改變。諸如：在 1994—2002 年期間，師資培育從登記制進入檢定制；在 2002 年修訂《師資培育法》（1994），實施「高級中等以下學校及幼兒園教師資格檢定考試」（以下簡稱教師資格檢定考試），考生需要具備「先實後檢」的資格。於 2019 針對 2002—2018 年舊制的「教師資格檢定考試」調整為新制「先檢後實」的「教師資格考試」（張裕程，2016）。

究竟數學教材教法課程或教育實習課程需要哪些教學實務內容？這是難以取得共識的問題。在 2005—2008 年期間，臺灣參加國際數學師資教育研究發展（Teacher Education Development Study in Mathematics, TEDS-M）的大型研究，調查結果雖然顯示不同師資培育機構師資生養成階段之學習機會有所不同（林碧珍，2011），但是該大型研究的調查結果仍然沒有提供有關師資生數學教學專業基本知識的相關訊息。臺灣自 2014 年起教師資格檢定考試首次納入「數學能力測驗」科目，師資生必須先通過此檢定考試，才能取得教師資格。教師資格檢定考試的測驗結果除了提供每年師資生的通過率外，若能善用試題資料庫分析歷屆命題方向與趨勢，研究結果將能提供給師資培育機構在「數學教材教法」課程內容規劃的參考，並協助師資生準備教師資格考試的方向。再者，分析國小數學教材教法歷屆試題的知識類別與細目，潛藏的意義是臺灣師資培育者期待師資生教國小數學所需要具備的基本專業知識內涵是什麼。因

此，若能分析臺灣國家層級的國小數學教材教法知識的評量架構，或許可以對國際間長期關注「一位合格國小教師教數學究竟需要具備哪些面向的專業知識？」的議題貢獻棉薄之力，這是本研究的研究動機。

依據教育部修正《高級中等以下學校及幼兒園教師資格考試命題作業要點》（教育部，2019）」第三點、第四點，數學能力測驗的命題參照普通數學和數學教材教法，而數學教材教法包含數學教材內容、兒童數學概念、數學教學與評量三個面向，這項修正目的是要確保師資生的數學教學品質。然而，數學教材法列為必修科目，實施多年後，究竟我國期待國小師資生所要具備的基本專業知識內涵為何？以及師資生具備教國小數學教學知識實際表現的水平為何？本研究的目的將從國小教師資格檢定考試「數學能力測驗」之數學教材教法知識的評測觀點，探討我國期待國小師資生所要具備的基本專業知識內涵。為達成研究目的，本研究的待答問題有二：(1)分析我國歷屆國小數學能力測驗評量架構的知識類別與細目為何？(2)探討國小數學能力測驗歷屆試題在知識類別與細目的比重與命題趨勢為何？

貳、國小教師資格檢定考試「數學能力測驗」

一、教師資格檢定考試制訂的背景

自 1994 年頒佈了《師資培育法》（1994）第 5 條「師資培育，由師範院校、設有師資培育相關學系或師資培育中心之大學為之」，開啟了師資培育的多元管道，在招生、培育、教師資格檢定及任用的辦法上做了很大的變革。張裕程（2016）回顧分析從 1996 到 2016 年臺灣師資培育在這二十年期間產生的重要變化，在 1994—2002 年的師資開放多元管道培育，產生了師資良莠不齊及師資過剩等問題；在教育實習方面，師資生需經過教育實習 1 年，成績及格，並經教師資格複檢合格，才能取得教師資格。為了解決這些問題，第一波師資培育改革制訂了兩項重要政策：(1)建立教師檢定制度，分為初檢及複檢；(2)建立師資培育中心評鑑制度，針對各教育學程評鑑之結果，作為增減招生學生名額的依據（張新仁、方德隆、邱愛玲、李芊慧，2007）。

隨著儲備教師人數的大量增加，在 2002 年 7 月 24 日教育部公布修訂了《師資培育法》（1994），開啟了第二波的師資培育教育政策的制訂與改革。在 2012 年 12 月由

教育部師資培育及藝術教育司公布師資培育白皮書，為臺灣師資培育立下一個新的里程碑（教育部，2014；陳益興等人，2009；張裕程，2016）。

二、教師資格考試制度的變革

從 2005 年教育部實施教師檢定考試，作為教師證書核發之依據，是師資走向專業化的一大進展。至今歷經 3 次的變革，第 1 次是在 2005－2013 年期間，教師資格檢定從形式上的書面檢覈方式，改為資格檢定考試。參加教師資格檢定考試的考生必須修完職前培育課程且完成教育實習課程。考試科目包含國語文能力測驗、教育原理與制度、發展與輔導、課程與教學等四科。

第 2 次變革是自 2014 年起，為了讓教檢能夠更符合實際師資培育的需求，修正教檢的內容與方式，並增加國民小學師資類科加考「數學能力測驗」一科，以期能有效提升國民小學教師數學教學知能（教育部，2014）。

第 3 次變革從 2019 年起，除了增設語文能力測驗外，由每年 3 月舉行「先實後檢」的「教師檢定考試」，改為每年 6 月舉行「先檢後實」的「教師資格考試」。在 2005－2017 年期間，實施「先實後檢」的舊制產生了一些問題，這些問題包括：師資生在實習期間因擔心教師檢定考試，無法專心實習。每年約有 4 成師資生實習完卻因沒通過教師資格檢定考，等於白費一學期的實習。因此新制的實習除了讓師資生於實習過程能心無旁騖地學習，而且能在實習教師數量減少的情況下，實習學校的國民小學更能全心協助輔導。

教檢舊制實施了 6 年的數學能力測驗，累積了師資生評量試題的資料庫，若能分析舊制「先實後檢」的試題趨勢，研究結果將能提供實施新制「先檢後實」命題的參考與對照，對教育政策或師資培育上具有實質的意義與功能。本研究使用的資料是 103－108 年度共 6 年的數學能力測驗試題，這段期間適逢 108 年新制上路，108 年度第 2 次考試因命題架構上與舊制相同，且考生仍有部分是舊制，不再區分新舊制的試題，以下本文均以「教檢」統稱之。

三、「數學能力測驗」的評量架構

教育部近 20 年來對師培教育在制度與政策上不斷地進行變革與調整，於 2000 年 5 月 17 日發文至各大學師培中心將數學列為國小教師職前教育課程，以強化師資生的數學教學能力。自 99 學年度起將普通數學和數學科教材教法列為必修科目；又於 103

年公布「數學能力測驗」（以下有時以本考科簡稱之）列入教檢科目後，國家教育研究院成立試題研發小組，研擬評量架構和內容。試題研發小組在 102 年 9 月進行預試，以確認試題量、考生作答時間、試務等相關問題。每年本考科試題來源，是由國家教育研究院舉辦命題工作坊邀請各小學教育學程的普通數學或數學科教材教法的專任或兼任教授、數學輔導員先進行培訓，參與試題架構進行命題，再由試題研發小組召開會議以進行審題、修題，以建立題庫（高級中等以下學校及幼兒園教師資格檢定考試數學能力測驗試題研發小組，2014）。每年教檢考試前再邀請學者專家入闈場抽題、組題與修審，最後完成一份具有專家效度的「數學能力測驗」評量工具。從 109 年的 8 月份起「數學能力測驗」試題研發轉交由大考中心負責。

依據 2019 年 10 月 5 日教育部令修正《高級中等以下學校及幼兒園教師資格考試命題作業要點》第三點及第四點，數學能力測驗包含：普通數學（含數與量、代數、幾何、統計與機率）及數學教材教法（含數學教材內容、兒童數學概念、數學教學與評量）。本考科試題題型分為選擇題及非選擇題，非選擇題包括計算或證明題、問答題等。命題內容參照包含普通數學和數學科教材教法（教育部，2019）。「數學能力測驗」測驗時間為 80 分鐘。

參、國小教師教數學的專業知識內涵

一、國小教師教數學的專業知識類別

目前有關教師教數學需要的專業知識研究很多，不同研究者對教數學需要的專業知識類別界定範圍不同，知識類別用詞也不同，對不同知識類別強調的份量也不同；例如美國 National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]（2001）認為數學教學知識包含教學表徵、教學策略知識、促進課堂互動與達成集體共識的知識、及評量學生數學理解的知識。陳彥廷（2015）提出數學教學知識包含教學表徵、教學策略知識和對學習者認知知識。Ball, Thames 與 Phelps（2008）提出的教數學知識模型中，其中的一類稱為內容和學生知識類別，包含了有關學生認知；林碧珍（2001）、Fennema 與 Franke（1992）、Jacobs, Lamb 與 Philipp（2010）的研究均特別強調學生認知知識的重要。基於文獻分析整理有關教師教數學的專業知識研究，至少可分為以下 5 個研

究領域：(1)瞭解中小學階段職前或在職個案教師的數學教學專業知識的現況（呂玉琴，1998；陳彥廷，2015；鍾靜、趙曉美，2014；Fennema et al., 1996；Jacobs et al., 2010）；(2)設計師資培育方案以提升師資生素質之培育成效（劉唯玉，2017；Lee & Choy, 2017；Lin & Acosta-Tello, 2017）；(3)設計教師專業發展計畫，提升教師的數學教學專業知識的成效（林碧珍，2001；姚如芬，2006；許德田、張英傑，2004；Bingolbali, Akkoç, Ozmantar, & Demri, 2011；Lin, 2017）；(4)教師需要具備的數學教學專業知識標準的架構細目內容（李源順、林福來、呂玉琴、陳美芳，2008；林碧珍、蔡文煥，2007；鍾靜、張淑怡、陳幸玫、陸昱任、戴坤邦，2012）；(5)教師數學教學專業知識的評量（Delaney, Ball, Hill, Schilling, & Zopf, 2008；Kwon, Thames, & Pang, 2012）。

研究教師教數學的專業知識大多數是以個案研究，在數學教育研究大樣本的國際研究或對數學教師教育研究影響力較大的研究群：如(1)國際數學教師教育發展研究的評量架構（Teacher Education Development Study in Mathematics, TEDS-M）是評量師資生數學教學知識，包含數學課程知識、數學教學計畫知識、數學課堂實踐知識（Blömeke, & Kaiser, 2014；Tatto et al., 2012；Tatto et al., 2008）；(2)美國 Ball 等人提出教數學的知識模型（Mathematical Knowledge for Teaching, MKT）（Ball et al., 2008），此模型包含數學內容知識和數學教學知識兩大類知識。數學內容知識細分為三子類：普通數學知識（common content knowledge, CCK）、專門數學知識（specialized content knowledge, SCK）以及水平數學知識（horizon content knowledge, HCK）。數學教學知識細分為三子類：(a)數學課程知識（knowledge of curriculum, KCC）：是有關學校數學課程的知識；(b)內容和學生知識（knowledge of content and students, KCS）：是有關學生在特定數學主題的學習特性、如何有效的學習、如何補救迷思概念的知識；(c)內容和教學知識（knowledge of content and teaching, KCT）：對課程材料如何有效地呈現給學生的教學知識。此模型對國際數學教育在教師教數學專業知識研究具有相當的影響力（Cho & Tee, 2018；Zazkis & Mamolo, 2011）；(3)英國 Roland 等人提出知識四重奏（knowledge quartet, KQ）（Rowland, Huckstep, & Thwaites, 2005），包含：(a)基礎知識：是教師的數學知識和信念，為數學教學的基本條件。這類知識整合了 Shulman（1986）的學科內容知識（content knowledge）與 Ball 等人的普通數學知識，以及 Fennema 與 Franke（1992）的教師信念；(b)轉化知識：強調教師在教學中選用範例、表徵、工具以及演示與解釋的能力，與 Shulman 所提出 PCK 的轉化（transformation）相呼應，對應於 Ball 等人的 SCK 和 KCT；(c)連結知識：強調教學程序之間的連結，概念與概念之間

的連結，對應於 Ball 研究團隊的 HCK；(d)應變知識：是教學中教師的隨機應變能力，呼應了 Fennema 與 Franke 的教學情境知識。

除了 3 個大型國際研究和 4 篇是國外有關教師教數學專業知識常被引用的文獻，在國內，則透過臺灣期刊論文索引系統、goole 學術搜尋、華藝線上圖書館檢索系統，以「教師」、「教學」與「專業知識」相關等關鍵詞查詢，再以「國小階段」及「數學」的關鍵詞，過濾後逐一瀏覽文章內文的文獻探討一節中已針對國內過去不同學者之數學教師專業知能的研究整理分析的文獻，最後留下 5 篇文獻做為本研究數學教師專業知識類別進行分析，分別是林碧珍（2001）、姚如芬（2006）、陳彥廷（2015）、許德田與張英傑（2004）、鍾靜與趙曉美（2014）。

表 1 是整理 12 篇文獻的知識類別。依據表中出現較多的知識領域，決定為本研究知識類別的分類架構。表 1 顯示學科內容知識、學科教學知識、課程教材知識、學生認知知識是比較多學者關注的四個知識類別。但因數學學科內容知識是我國國小教師資格檢定「數學能力測驗」考科參照普通數學內容來命題，而學科教學知識、學生認知知識、課程教材知識是參照數學教材教法內容來命題。而本研究的分析對象是「數學能力測驗」考科中的數學教材教法試題，因此以數學課程知識、分析學生認知知識及教學策略知識的三個知識類別，成為本研究分析三個知識類別的初步架構。

表 1 國內外有關數學教學專業知識的類別

學者	學科內容知識	一般教學知識	學科教學知識	課程教材知識	學生認知知識	情境脈絡知識	教育價值知識	教師認同知識
林碧珍（2001）	✓		✓	✓	✓			
姚如芬（2006）	✓		✓	✓	✓	✓		
陳彥廷（2015）	✓		✓	✓	✓			
許德田與張英傑（2004）	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
鍾靜與趙曉美（2014）	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Ball et al.（2008）	✓		✓	✓	✓	✓		
Fennema and Franke（1992）	✓	✓	✓		✓	✓		✓
NCTM（2001）	✓		✓	✓	✓			
Reynolds（1992）	✓	✓	✓	✓				
Rowland, Turner, Thwaites, & Huckstep（2009）	✓		✓	✓	✓	✓		✓
Tatto et al.（2008）	✓		✓	✓	✓			
Shulman（1986）	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	

二、國小教師教數學的專業知識細目

（一）教師的數學課程知識細目

數學課程知識不僅是 Ball 等人（2008）的 MKT 知識架構的一類，且是 TEDS-M 知識架構的類別之一。TEDS-M 評量架構中的數學課程知識類別包含：瞭解某一主題的數學教材脈絡、辨認教材的重要數學概念、以及了解學校課程中數學概念的縱向發展和橫向聯繫（Tatto et al., 2008）。許德田與張英傑（2004）強調實習教師需要了解教材編織的特性。林碧珍（2001）強調數學題目的語意結構是影響學生學習困難的重要因素，例如乘法問題中等組型問題和組合問題的結構不同。陳彥廷（2015）強調課程目標是教學設計的重要考量，而這是與教學相關，本研究將它移至數學教學知識類別。

有關數學課程知識的主要文獻是分析 MKT 知識架構、TEDS-M 評量架構、及 KQ 知識四重奏等三個大型研究計畫、NCTM (2001) 的文件、林碧珍 (2001)、姚如芬 (2006)、許德田與張英傑 (2004)、以及鍾靜與趙曉美 (2014)。將這些文獻涉及有關數學課程知識的內涵，整理成清單，將相同或類似的項目分類，若同類至少有 3 筆文獻，則成為分析架構的細目。表 2 是整理後，作為本研究分析數學課程知識的 3 項細目。關於「瞭解數學題目的特性」的試題如：

有一數學題目為「安安今年 10 歲，爸爸年齡和安安年齡合起來是 45 歲，問幾年後爸爸的年齡是安安的 2 倍？」；這個題目的特性是屬於哪一種數量關係？
(A) 和不變 (B) 差不變 (C) 積不變 (D) 比值不變

表 2 教師的數學課程知識細目

研究文獻	文獻提到的內涵	整合後的項目內容
Rowland et al. (2009) ; Tatto et al. (2008)	◆連結：強調教材重要概念 ◆辨別重要的數學概念	[1] 辨識教材的數學概念
許德田與張英傑 (2004) ; 鍾靜與趙曉美 (2014) ; Ball et al., (2008) ; Rowland et al. (2009) ; Tatto et al. (2008)	◆了解數學教材脈絡 ◆連結：和前面教材連結	[2] 了解教材的先後順序
林碧珍 (2001) ; 姚如芬 (2006) ; NCTM (2001) ; Rowland et al. (2009)	◆布題的難易 ◆題目屬性類型及語意結構	[3] 了解數學題目的特性

(二) 教師分析學生數學認知知識細目

Shulman (1986) 提到學生的思維和想法是教學最關鍵的基礎。1990 年代末期至今，自從認知引導教學 (Cognitively Guided Instruction, CGI) 模式提出後，學生認知知識受到數學教育研究者的關注。教師越瞭解學生的學習策略及思考方法，則越能進行有效的教學決策 (Fennema, Carpenter, Franke, & Carey, 1993 ; Franke et al., 2009 ; Franke et al., 2015)。有關學生學習的認知，許多研究將焦點放在提升教師對學生解題想法或策略的了解，及預測學生可能的解法和迷思概念，研究指出增進教師有關學生

學習認知知識有助於提升數學教學效果（林碧珍，2001；Fennema et al., 1996；Lin, 2017；Rowland et al., 2009）。

有關教師課堂覺察力的研究，強調需要關注學生的解題策略、解釋學生的理解、並依據學生的理解決定如何進行下一步回應（Jacobs et al., 2010；Lee & Choy, 2017）。有關學生迷思概念的研究指出：從學生的困難或迷思概念中加以釐清，是建立數學概念的一種途徑（Bingolbali et al., 2011；Schleppenbach, Flevares, Sims, & Perry, 2007）。教師不僅要關注學生得到答案的對錯，而且需關注在正確或錯誤答案背後的數學想法；瞭解和診斷產生學習困難、迷思概念、錯誤類型等原因；若善用學生的錯誤或迷思概念來幫助學生釐清或預防錯誤再發生，是幫助學生數學學習的一種有效方法（Ball, 1993；Borasi, 1994；Lin, 2017）。

為了要形成分析學生數學學習認知知識的細目，主要分析的文獻是以數學教育研究中提及學生認知知識的文獻，包含：呂玉琴（1998）、林碧珍（2001）、姚如芬（2006）、陳彥廷（2015）、許德田與張英傑（2004）、鍾靜與趙曉美（2014）、以及 3 個大型研究計畫如 MKT 知識架構（Ball et al., 2008）、TEDS-M 評量架構（Tatto et al., 2008）、及 KQ 知識四重奏（Rowland et al., 2005）；其餘英文文獻尚包含：Bingolbali 等人（2011）、Fennema 等人（1996）、Jacobs 等人（2010）、Lee 與 Choy（2017）、Lin（2017）、NCTM（2001）、Schleppenbach 等人（2007）、Stein、Engle、Smith 與 Hughes（2008）。再從初步分析的項目，將相同或類似的項目分類，若同類至少由 3 筆文獻產生，則整合後成為 1 項細目。表 3 是整合後有關分析學生數學認知知識的 6 項細目，將作為本研究分析架構中分析學生數學認知知識的項目。其中[1] [2] [3] [4]是關於了解、判斷的認知及背後的數學意義及預期學生解法；[5] [6]是辨認和預期學生的困難迷思或錯誤解法。關於「判斷學生的解法與說法是否正確」的試題如：

有一「小數除法」教學布題為：「想想看， $427.5 \div 0.469$ 的結果會如何？」

下面四位學童的說法，何者正確？

- (A) 除的結果比 427.5 小，因為愈除會愈小
- (B) 除的結果比 427.5 大，因為 0.469 比 1 小
- (C) 除的結果約是 427.5 的一半，因為 0.469 大約是 0.5
- (D) 除的結果約是 427.5 的 10 倍，因為 427 約是 0.469 的 10 倍

表 3 教師分析學生認知知識細目

研究文獻	文獻提到的項目內涵	整合後的項目內涵
呂玉琴（1998）；林碧珍（2001）；姚如芬（2006）；陳彥廷（2015）；Rowland et al.（2009）；Tatto et al.（2008）。	◆理解學生的先備知識	[1] 了解某解法的先備知識
呂玉琴（1998）；林碧珍（2001）；許德田與張英傑（2004）；鍾靜與趙曉美（2014）；Ball et al.（2008）；Bingolbali et al.（2011）；Jacobs et al.（2010）；Lee & Choy（2017）；Rowland et al.（2009）；Stein et al.（2008）；Tatto et al.（2008）。	◆關注學生的解釋和說明 ◆關注正確的數學想法 ◆解讀學生的解題方法背後的數學意義 ◆了解及分析解釋學生解法 ◆瞭解認知發展層次 ◆瞭解解法間的異同及關連	[2] 了解解法的數學意義及認知層次
呂玉琴（1998）；姚如芬（2006）；陳彥廷（2015）；Ball et al.（2008）；Franke et al.（2009, 2015）。	◆評價學生解法是否正確	[3] 判斷解法與說法的正確性
林碧珍（2001）；Fennema et al.（1996）；Lin（2017）；Stein et al.（2008）；Tatto et al.（2008）；Rowland et al.（2009）。	◆預測學生普遍性的反應 ◆預測學生可能的解法	[4] 預測學生正確的解法或想法
呂玉琴（1998）；Bingolbali et al.（2011）；Fennema et al.（1996）；Franke et al.（2009, 2015）；Lin（2017）；NCTM（2001）；Rowland et al.（2009）；Schleppenbach et al.（2007）。	◆了解學生的解法和困難 ◆釐清學生困難或迷思概念 ◆找出學生的錯誤概念 ◆分析學生錯誤的來源	[5] 分析、偵錯、了解學生的困難或迷思
林碧珍（2001）；Ball et al.（2008）；Fennema et al.（1996）；Lin（2017）；Rowland et al.（2009）。	◆預測學生可能的迷思概念 ◆預測學生可能遇到的困難	[6] 預測學生的迷思或困難

（三）教師的數學教學策略知識細目

若發展教師的數學教學策略知識，則能改進教師的教學實務和促進學生的學習（Ball et al., 2008；Rowland et al., 2005）。在 TEDS-M 評量架構中的數學教學計畫知

識包含：能依據活動辨識適當的教學目標、能瞭解不同教學路徑的關連（Tatto et al., 2008）。在數學知識四重奏 KQ 架構中（Rowland et al., 2009）的轉化（transformation）、連結（connection）與應變（contingency）三者，都與數學教學知識有密切關係。「轉化」是當教一個概念時教師能將自己所理解的意義，利用表徵、類比和解釋等方式轉換成學生可理解的方式；如教學演示、適當使用教具、選擇適當的表徵和例子等。「連結」在於使教學流暢、一致及連貫性，教師要解釋說明某特定概念不同意義之間、過程之間、概念之間的連結。「應變」是在教學中出現非預期的偶發事件，教師對學生的行為和想法做出立即性的反應；教學中的應變包含：對學生想法的回應、對偏離議題的處理、對教學方法和資源的使用做回應（鍾靜、趙曉美，2014；Rowland et al., 2005；Rowland et al., 2009）。

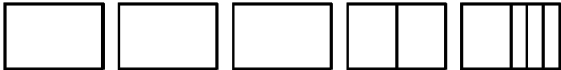
以學生為主體是當今主流的教育思潮，若教師能處理學生特定的困難、解釋學生的想法、針對學習困難進行補救教學、針對學生的迷思概念提出診斷教學策略，能提升學生的數學學習效果（林碧珍，2001；許德田、張英傑，2004；Conner, Singletary, Smith, Wagner, & Francisco, 2014；Franke et al. 2009；Franke et al, 2015；Lee & Choy, 2017；Van Es, 2011）。

Stein 等人（2008）提出有利於促進學生課堂討論的五個教學要點：教師需要(1)預期學生可能的解法或想法；(2)審視學生解題過程所遭遇的困難；(3)挑選不同解法或策略作為全班討論；(4)有目的地安排學生解題發表順序；(5)幫助學生瞭解各種解法間的異同及關連。Hufferd-Ackles、Fuson 與 Sherin（2004, 2015）將教師在數學課堂中引導學生的討論分別依據教師角色、提問、解釋數學想法、數學表徵和學生的自律性五個向度，將討論的品質區分為 0—3 共四級的不同層次。其中有關提問的最高層次是能達到學生之間可以互相提問對方回答為什麼、或要求說服他人的提問。

為了要形成數學教學策略知識的細目，主要分析的文獻是以數學教育研究中提及數學教學相關的文獻，中文包含：林碧珍（2001）、姚如芬（2006）、陳彥廷（2015）、許德田與張英傑（2004）、鍾靜與趙曉美（2014）。英文文獻包含：3 個大型研究計畫如 MKT 知識架構（Ball et al., 2008）、TEDS-M 評量架構（Tatto et al., 2008）、及 KQ 知識四重奏（Rowland et al. 2005）；以及 Borasi（1994）、Conner 等人（2014）、Fennema 等人（1996）、Franke 等人（2009, 2015）、Hufferd-Ackles 等人（2004, 2015）、Lee 與 Choy（2017）、Lin（2017）、NCTM（2001）、Schleppenbach 等人（2007）、Stein 等人（2008）、與 Van Es（2011）。再從初步分析的項目，將相同或類似的項目分類，

若同類至少由 3 筆文獻產生，將其整合後成為一項細目。表 4 是整合後有關數學教學策略知識的 10 項細目，將作為本研究分析有關數學教學策略知識的細目。其中[1] [2] 是與教學目標相關；[3]是與教學策略與方法有關；[4] [5] [6]是與學生的解法或想法進行教學；[7] [8]是與釐清迷思概念相關的教學重點。關於「善用學生解法進行下一步教學」的試題如：

教師布了一數學問題：「媽媽買了 5 條巧克力，平分給 3 個小孩，全部分完，每個小孩可以分得幾條巧克力？請畫圖並記錄算式及結果。」
四位學童的解題如下：

甲學童：		$5 \div 3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ (條)
乙學童：		$5 \div 3 = 1 + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$ (條)
丙學童：		$5 \div 3 = \frac{5}{3}$ (條)
丁學童：		$5 \div 3 = \frac{5}{15}$ (條)

若要達成「兩整數相除的結果以分數表示」的教學目標，則教師最適合選用哪一位學童的作法進行說明？

- (A) 甲學童 (B) 乙學童 (C) 丙學童 (D) 丁學童

表 4 教師數學教學策略知識細目

研究文獻	文獻提到的項目內容	整合後的項目內容
林碧珍（2001）；姚如芬（2006）；陳彥廷（2015）；鍾靜與趙曉美（2014）；Ball et al.（2008）；NCTM（2001）；Rowland et al.（2009）；Tatto et al.（2008）。	◆能計畫和選擇適當的教學活動 ◆轉化：選擇恰當的數學例子 ◆依據教學目標評析布題的適切性，依據教學目標修改布題	[1] 依據教學目標選用設計布題或教學活動
Rowland et al.（2009）；Tatto et al.（2008）；Van Es（2011）。	◆建立適當的教學目標 ◆轉化：理解教學活動的目的	[2] 指認布題或教學活動的教學目標
林碧珍（2001）；姚如芬（2006）；陳彥廷（2015）；鍾靜與趙曉美（2014）；Ball et al.（2008）；Fennema et al.（1996）；Hufferd-Ackles et al.（2004）；NCTM（2001）；Rowland et al.（2009）；Stein et al.（2008）；Tatto et al.（2008）；Van Es（2011）。	◆解釋或呈現數學概念解題過程 ◆瞭解和掌握有效地使用模型 ◆依據數學問題或學生的數學想法畫圖或用算式表徵 ◆轉化：教具的使用、表徵的選擇 ◆連結：解釋某特定概念之間、過程之間的連結	[3] 使用適當的表徵或教具呈現與解釋概念或過程
林碧珍（2001）；Hufferd-Ackles et al.（2015）；Stein et al.（2008）。	◆挑選不同解法或策略作為全班討論 ◆有目的安排學生解題發表順序	[4] 挑選及安排學生解題的發表順序
林碧珍（2001）；姚如芬（2006）；陳彥廷（2015）；鍾靜與趙曉美（2014）；Conner et al.（2014）；Hufferd-Ackles et al.（2015）；Lee & Choy（2017）；Rowland et al.（2009）；Tatto et al.（2008）。	◆分析學生提問的內容 ◆要求說服及解釋想法的提問 ◆應變：判斷學生的想法並回應 ◆連結學習和教學策略	[5] 依學生的反應提出回饋（如追問、回應想法）
Ball et al.（2008）；Conner et al.（2014）；Lee & Choy（2017）；Jacobs et al.（2010）；Rowland et al.（2009）。	◆處理學生特定的困難 ◆依學生的理解決定下一步回應 ◆應變：應對學生問題的多種方法	[6] 善用學生解法進行下一步教學
林碧珍（2001）；Franke et al.（2015）；Hufferd-Ackles et al.（2015）；Rowland et al.（2009）；Stein et al.（2008）。	◆診斷學習困難、迷思概念、錯誤類型等原因 ◆應變：提出問話診斷錯誤原因	[7] 設計布題或問話診斷迷思概念
Ball et al.（2008）；Borasi（1994）；Franke et al.（2009）；Hufferd-Ackles et al.（2015）；Lee & Choy（2017）；Lin（2017）；Rowland et al.（2009）；Tatto et al.（2008）。	◆依據教學目標修改布題的難易 ◆針對特定學習提出教學方法 ◆提出關鍵性問話 ◆應變：短時間回饋學生的反應	[8] 提出學生認知或迷思概念的教學重點
Conner et al.（2014）；Rowland et al.（2009）；Tatto et al.（2008）。	◆應變：對教學方法和使用做回應 ◆選擇不同的教學路徑，並了解之間的關連	[9] 判斷不同的教學策略或教學想法
林碧珍（2001）；陳彥廷（2015）；許德田與張英傑（2004）；Tatto et al.（2008）。	◆依教學目標設計適當的評量 ◆診斷學習困難的命題	[10] 依目標或學生認知與困難選用或設計評量試題

(四) 教師教數學的知識類別與細目

依據以上的文獻整理分析，彙整表 2、表 3 及表 4 的最右欄項目，形成教師教數學專業知識的類別與細目架構，包含三類知識共 19 項細目，如圖 1。其中教師的數學課程知識 3 項細目，分析學生數學認知知識 6 項、數學教學策略知識 10 項；此知識類別與細目將作為我國師資生「數學能力測驗」之數學教材教法歷屆試題的分析架構。

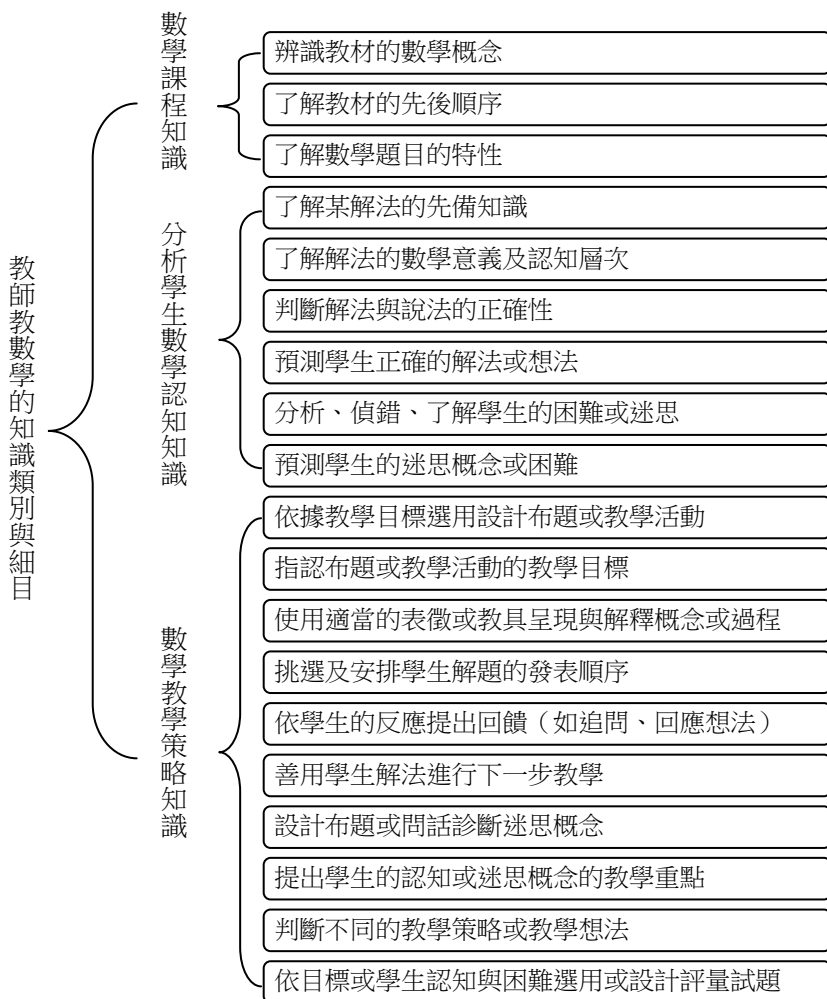


圖 1：教師教數學的知識類別與細目

三、國小教師教數學的專業知識之評量

(一) 評量教數學的專業知識面臨的挑戰

評量國小教師教數學的專業知識是一件極為複雜又具挑戰性的任務，原因有三：(1)要評量什麼？是研發評量工具首要面對的問題。國小教師教數學需要的專業知識是什麼？需包含哪些面向？這些問題難有肯定的答案；(2)評量工具需要評量哪些知識？需要包含實務性知識嗎？(3)如何評量？從理解轉化到教學實踐之試題不易研發，由於在課堂教學實踐的評量，不同於數學內容知識的評量（Kersting, Givvin, Thompson, Santagata, & Stigler, 2012）；(4)是要採用紙筆測驗？還是要採用真實教學情境的評量？要怎麼做呢？(5)教師知識的評量試題不易研發：Orrill 等人（2015）提出具有信效度的教師知識評量工具不易研發，在研發試題時面臨的困難是：(a)不易研發難易程度不同需求的試題，國小階段不同年級的教材範圍很廣，不易編製一份教師知識難易適中又涵蓋全面性內容的試題評量工具；(b)不易研發指定目標的評量試題；(c)不易研發精確的題幹及誘答選項的試題；(d)動態的教學事件不易轉化為靜態的紙筆測驗試題。

(二) 有關國小教師教數學的專業知識的評量研究

雖說教師知識的評量困難度高，但仍然有其必要性。因為研究顯示教師的知識不僅和學生的數學成就有高度相關（Baumert et al., 2010；Hill, Rowan, & Ball, 2005；Ma, 2010），而且影響課堂的教學實踐品質（Hill et al., 2011）。近二十年來，越來越多的研究者關注於國小教師教數學的專業知識評量（Beswick & Goos, 2012；Bradshaw, Izsák, Templin, & Jacobson, 2014；Delaney, 2012；Delaney et al., 2008；Hill, Schilling, & Ball, 2004）。如 Ball 研究團隊關注於研發國小教師教數學的專業知識的評量工具，他們研發了教數學的專業知識（mathematics knowledge for teaching, MKT）的評量工具，評量架構包含內容向度（數概念、運算、數和運算、規律性、函數、代數）與認知向度（數學內容知識）（Delaney；Hill, 2007；Hill et al., 2004）。此評量工具包含開放問題和選擇題，也在許多國家施測，如印尼（Ng, 2012）、伊朗（Delaney）、韓國（Kwon et al., 2012）。

反觀國內有關師資生專業知識的研究，有多個小型研究群的研究焦點是在制定教師數學教學專業標準及細目標標（李源順等人，2008；林碧珍、蔡文煥，2007；鍾靜等人，2012），但這些研究尚未依據標準指標發展師資生專業的評量工具。師資生數

學教學知識評量的國內大型研究，是臺灣參加 TEDS-M 國際職前國小數學教師的國際評量，該研究有編製數學教學評量架構與試題評量大五實習師資生的數學教學知識（林碧珍，2011）。其次，則是國家教育研究院每年舉辦教師資格檢定考試，此一考試目前大多僅是用來比較各師範／教育大學、設有師資培育相關學系大學、師資培育中心大學之間的教檢通過率或幫助每一考生是否通過基本專業門檻（教育部，2014）。「數學能力測驗」試題資料庫，較少被用來進一步探討分析作為研究之用。因此，本研究將善用此試題資料庫分析師資生數學教學專業知識的評量架構與命題趨勢，得到的研究結果，將能作為我國過去實施「先檢後實」師資培育制度下數學能力測驗有關教材教法的命題反思與檢討；而且將能提供給師資生對準備該考科試題的方向和範圍。

肆、研究方法

本研究分為兩個階段，第一階段是建立分析架構，採用文獻分析法。透過文獻分析建立教師教數學的知識類別與細目，作為我國國小數學教材教法歷屆試題的知識類別與細目之分析架構。第一階段進行兩輪的文獻分析，第 1 輪文獻資料主要是依據文獻，形成國小教數學的知識類別。第 2 輪是細讀文獻找出每一個知識類別的細目。分析步驟包含：閱讀整理、描述、分類及整合細目（Neuman, 1997/2000）。其中細目的分類，是以同類至少有 3 篇文獻以不同方式描述的細目，則彙整為一個細目，最後成為分析架構的細目。

第二階段的目的是依據分析架構分析歷屆試題，本研究採用科學客觀量化取向的內容分析法，由於數學能力測驗每個試題均可概念化，不僅可透過分類與統計來分析每個類別，且次數夠多使統計分析有效，具有量化取向的內容分析法特色（游美惠，2000）。

一、資料來源

扣除不公布的 107 年度試題外，本研究分析的試題包含 103 年度到 108 年度第 1 次舊制的「數學能力測驗」公開試題及 108 學年度第 2 次新制的「數學能力測驗」試題。試題包含普通數學 50 分和數學教材教法 50 分，合計 100 分。其中數學教材教法

包含：4 選 1 的選擇題共 15 題，總分為 30 分；問答題 4 大題，每個問答題包含 1—3 子題不等，共 20 分。6 年的總題數共有 136 題，其中選擇題共有 $15 \times 6 = 90$ 題；問答題共有 46 個子題。子題的分析單位是以問句或以子題是否給定配分來界定。

各年度試題以配分而言，選擇題每題 2 分，每年度的數學教材教法選擇題試題共 30 分，問答題每題 5 分共 20 分，每個問答題的配分不相等，分別為 1、2、2.5、3、4、5 分。大多數問答題是包含 2 個子題，其中只有三題不包含子題，6 年的問答題共包含 46 子題。以 103 年度的第 11 題為例，該題既沒有子題序號，也沒有配分，也沒有問句，故此問答題不分子題，配分為 5 分。

103 年第 11 題：老師出了兩個有關角柱的試題如下：

甲題：「一個五角柱，它有幾個面？① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8」

乙題：「一個角柱有 7 個面，它是什麼形體？

①三角柱 ②四角柱 ③五角柱 ④六角柱」

請比較這兩試題的難度，並說明理由。

一、資料分析

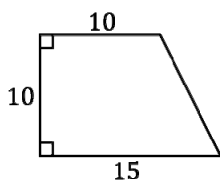
本研究選擇題是以題為內容分析單位，問答題則係以子題為分析單位。每個試題均經過四個步驟分析完成：

步驟 1：將每個試題編 1 個代碼：依據內容向度、題型和年度給予代碼。內容向度的代碼為：N-數（含代數）、M-量、G-幾何、D-統計圖表。題型的代碼為：C-選擇題和 R-問答題。如 NC103-16 表示 103 年度第 16 題是數的選擇題。

步驟 2：依據文獻分析教師教數學的知識類別與細目之分析架構，將每個試題歸類，將步驟 1 的代碼填入知識類別與細目的表格中。本考科中有關數學教學與評量試題都歸到數學教學策略知識類別。問答題包含的各子題分別歸到不同細目或知識類別。例如 106 年度問答題第 6 題包含兩個子題，該題子題(1)是用來評量師資生是否了解學生解法背後的數學意義，所以歸到分析學生數學認知知識類別，而子題(2)是用來評量師資生是否能善用學生解法進行下一步教學，所以歸到數學教學策略知識類別。

106 年度第 6 題：某教師想幫助學童理解梯形面積公式的導出。首先利用已學過的三角形或長方形面積公式，讓學童求算梯形的面積，做為公式導出的鋪陳活動，再利用學童的解題來導出梯形面積公式。下面是該師進行的鋪陳活動：

請利用學過的面積公式，算出下面圖形的面積是多少？



(單位：公分)

有兩位學童的作法如下：

甲、 $15 \times 10 = 150$ $10 \times 5 \div 2 = 25$ $150 - 25 = 125$ 答：125 平方公分

乙、 $10 + 15 = 25$ $25 \times 10 = 250$ $250 \div 2 = 125$ 答：125 平方公分

試回答下列問題：

(1)請分別用圖畫出兩位學童的解題想法。【4 分】

(2)哪位學童的作法最適合做為引出「梯形面積公式」的教學示例？【1 分】

步驟 3：依據分析架構，進行相同知識類別的細目歸類。以數學課程知識類別為例，表 5 是「了解教材的先後順序」的選擇題總題數和總分數，以及對應到各數學主題的分布表。有關歷屆試題分類在數學課程知識類別各細目的總表，請參見附錄。

表 5 細目「了解教材的先後順序」試題出現的年度、題號、主題的分析表

細目	年度	103	104	105	106	108 (1)	108 (2)	題數 (分數)
了解教材的先後順序	數與計算	NC103-17 NC103-18		NR105-5-1(2)		NC108(1)-17 NC108(1)-16		C-4(8) R-1(2)
	代數							
	量與實測		MC104-19 MC104-27					C-2(4)
	幾何	GR103-11-1(5)			GR106-5-1(2) GR106-5-2(3)			R-3(10)
	統計圖表	DC103-22						C-1(2)

註：(1)GR106-5-1(2)表示 106 年度是幾何問答題(GR)，5-1(2)是第 5 大題第 1 小題的配分是 2 分；(2)最右欄 C-4(8)表示在選擇題共有 4 題，配分 8 分；(3)R-1(2)表示在問答題共有 1 題，配分 2 分。

步驟 4：依據各年度出現的類別向度及內容向度的題數進行題數及配分統計與計算百分比。

三、資料分析的信效度

文獻分析法是本研究用來提升分析架構的內容效度。3 位數學教材教法教師，一起檢視分析架構的細目及試題分析，是本研究用來提升試題分析架構的專家效度。

除了研究者外，本研究原先邀請 1 位數學科教材教法教師，經過本論文第 1 次審查後再邀請第 2 位數學科教材教法教師。3 人先討論分析架構的適切性，再分別進行題數和配分的統計分析。依據本論文審查委員的初審意見提出原先分析架構，有些細目不易清楚分辨，3 人經過協商討論後，將分析架構的細目進行合併。合併的細目包含：在分析學生數學認知知識類別中，將意義相近的項目合併為 6 項細目，在數學策略知識類別中，將意義相近的項目合併為 10 項細目。

有關試題的分析，第 1 輪先依據內容向度分類每個試題。第一輪需要進行協商的試題有：不易區分為代數或數的試題。第 2 輪再依據分析架構，逐年且逐題進行歸類，分析過程需要討論協商的試題有：(1)問答題的一個子題若有兩個配分，是要算一子題？還是兩子題？協商後，以一個問號算為一子題；(2)關於迷思概念試題難以區辨是屬於分析學生數學認知知識類別或數學教學策略知識類別，經協商討論後，若涉及需要釐清迷思概念的教學策略，則歸類到數學教學策略知識類別。

分析架構經過專家審查整併完成後，接著，分析 103 年度試題。採用王石番(1989)信度計算公式：相互同意度 = $\frac{2M}{N1+N2}$ ， M =完全同意試題數量， $N1$ =第一位編碼者的編碼題數， $N2$ =第二位編碼者的編碼題數。信度 = $\frac{n \times (\text{平均相互同意度})}{1 + [(n-1) \times \text{平均相互同意度}]}$ ，計算結果為 103 年度試題平均相互同意度為.79，信度為.92。經過協商討論達成共識後，接著，分析編碼 104 年度的試題，並協商討論直到一致性為 100%，再進行下一個年度的編碼，直到 6 個年度的試題全部編碼完成，且一致性為 100%。

伍、結果與討論

本節首先描述「數學能力」測驗歷屆試題在類別向度和內容向度題數的分布趨

勢。其次是分別描述數學課程知識、分析學生數學認知知識、數學教學策略知識的試題類型。

一、數學教材教法的知識類別向度與內容向度的試題分布與趨勢

（一）數學教學策略知識在歷屆試題的題數和配分都是比重最少

表 6 是歷屆試題在數學課程知識、分析學生數學認知知識、數學教學策略知識三類知識別的選擇題和問答題的題數與配分整理表。

表 6 歷屆試題在三個知識類別的選擇題和問答題的題數與配分表

配分	試題題數					
	數學課程知識		分析學生數學認知知識		數學教學策略知識	
	問答題	選擇題	問答題	選擇題	問答題	選擇題
1 分	1	--	0	--	1	--
2 分	4	37	6	35	6	18
2.5 分	6	--	4	--	0	--
3 分	2	--	3	--	9	--
4 分	0	--	1	--	0	--
5 分	1	--	1	--	1	--
總子題數	14 小題 (29%)	37 題 (41%)	15 小題 (33%)	35 題 (39%)	17 小題 (38%)	18 題 (20%)
總配分	35 分 (29%)	74 分 (41%)	40 分 (33%)	70 分 (39%)	45 分 (38%)	36 分 (20%)
合計題數	51 (36%)		50 (37%)		35 (27%)	
合計配分	109 (36%)		110 (37%)		81 (27%)	

依據表 6 的資料，以題數和配分分析歷屆全部試題得到以下兩個研究結果：

1. 從題數分析，歷屆試題中，在數學課程知識、分析學生數學認知知識、數學教學策略知識的題數分別為 51、50、35 題，百分比各佔 36%、37%及 27%。數學教學策略知識是三類知識中所佔的題數最少的一類。

2. 從配分分析，在數學課程知識、分析學生數學認知知識、數學教學策略知識的

選擇題配分分別為 109 分、110 分、81 分，百分比各佔 36%、37%及 27%。在三類知識配分中，也是數學教學策略知識所佔的配分分數最少。

以上的研究結果發現：數學教學策略知識在歷屆試題的題數和配分都佔三類知識比重最少。

（二）數學教學策略知識在選擇題題數和配分佔三類知識比重最少，但在問答題所佔比重最多

依據表 6 的資料，分別以選擇題和問答題分析題數和配分分析歷屆試題，得到以下兩點研究結果：

1. 以選擇題而言：(1)若以題數分析，90 題中，數學課程知識、分析學生數學認知知識、數學教學策略知識的選擇題數分別為 37、35、18 題，各佔 41%、39%、20%；(2)若以配分分析，在數學課程知識、分析學生數學認知知識、數學教學策略知識的選擇題配分分別為 74 分、70 分、36 分，百分比各佔 41%、39%及 20%。結果發現，數學教學策略知識的選擇題題數和配分都佔三類知識的比重最少。

2. 以問答題而言：(1)若以題數分析，46 個子題中，數學課程知識、分析學生數學認知知識、數學教學策略知識的問答題題數分別為 14、15、17 題，各佔 29%、33%及 38%；(2)若以配分分析，在數學課程知識、分析學生數學認知知識、數學教學策略知識的問答題配分分別為 35 分、40 分、45 分，百分比為 29%、33%及 38%。結果發現，在三類知識類別中，在問答題的題數或配分上都以數學教學策略知識所佔份量最多。

以上的研究結果發現：數學教學策略知識在選擇題題數和配分都佔三類知識比重最少，但卻佔問答題題數和配分比重最多。

（三）數學教材教法試題無論是以題數與配分進行統計得到的結果一樣

表 7 是數學教材教法在類別向度和內容向度的題數和配分與其百分比統計表。從表中發現每細格內的題數和配分百分比幾乎都相等。這個結果顯示無論在知識類別向度或數學內容向度，雖然選擇題配分和問答題子題的配分不同，但在進行試題分析時，採用題數百分比或配分百分比進行比較，分析得到的研究結果是一樣的。

整體而言，在知識類別中，數學教學策略知識的試題題數及配分最少，約佔 27%，其他兩類知識所佔比重相當。在數學內容中，以數的試題最多，數、量、幾何、統計

與圖表及代數的題數分別為 59、25、26、16、10 題，各佔 43%、18%、19%、13%、7%；在三類知識中仍然都是以數為主題的試題佔比重最高。

表 7：數學教材教法在類別向度和內容向度的試題題數和配分與其百分比

		題數（配分） 題數百分比（配分百分比）		
類別向度 內容向度	數學課程教材	分析學生數學認知知識	數學教學策略知識	合計
數	22 (47)	25 (52)	12 (27)	59 (126)
	16% (16%)	18% (16%)	9% (9%)	43% (42%)
量	8 (16)	6 (19)	9 (19)	25 (54)
	6% (5%)	4% (6%)	7% (6%)	18% (18%)
幾何	11 (25)	12 (28)	3 (7)	26 (60)
	8% (8%)	9% (9%)	2% (2%)	19% (20%)
統計圖表	4 (8)	4 (9)	8 (21)	16 (38)
	3% (3%)	3% (3%)	7% (7%)	13% (13%)
代數	6 (13)	1 (2)	3 (7)	10 (22)
	4% (4%)	1% (1%)	2% (2%)	7% (7%)
合計	51 (109)	50 (110)	35 (81)	136 (300)
	37% (36%)	37% (37%)	26% (27%)	100% (100%)

（四）數學教學策略知識試題在各年度的配分比重都比其他兩類知識少

前述已經分析全部題數和配分在知識類別的分布，以數學教學策略知識的所佔比重最少，是否在各年度的三類知識試題分布也是出現相同情形呢？

圖 2 的趨勢圖出現下面四個趨勢：(1)數學課程知識和分析學生數學認知知識的考題配分百分比呈現逐年些微下降的趨勢；(2)數學課程知識 108(2)年度 (52%) 降為 103 年度 (26%) 的一半。(3)數學教學策略知識的趨勢圖，顯示出數學教學策略知識考題配分百分比有逐漸些微上升的趨勢。(4)除了 108(2)年度外，幾乎每年的考試題數學課程知識配分和分析學生數學認知知識配分，都比教學策略知識的配分多，從圖中分析學生數學認知知識和數學課程知識配分折線圖都分布在數學教學策略知識配分圖的上方即可得知。

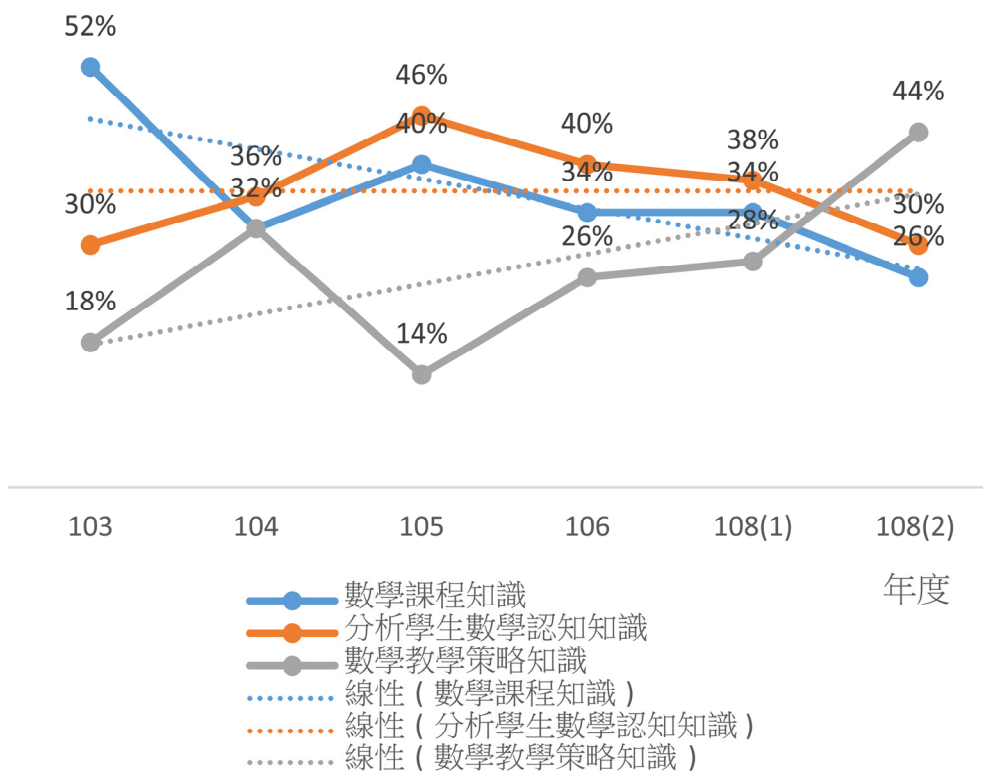


圖 2 歷屆試題在知識類別配分的趨勢圖

(五) 每屆考題以數為主題份量最多，且有逐年微微下降趨勢

圖 3 是不同數學內容的考題配分百分比的趨勢圖。從趨勢圖的變化顯示兩個趨勢：(1)從數和量主題的兩條線性趨勢圖顯示出數和量的考題數量有逐年緩緩微微下降的趨勢；(2)每屆考題以數為主題的份量最多，幾乎佔總配分的四成五左右，從圖中顯示數為主題的折線圖遙遙位居其他主題之上。由於數學教材教法是以國小數學教材為命題範圍，國小數學教材以數的單元數最多，歷屆考題出現這樣的比重是合理的。

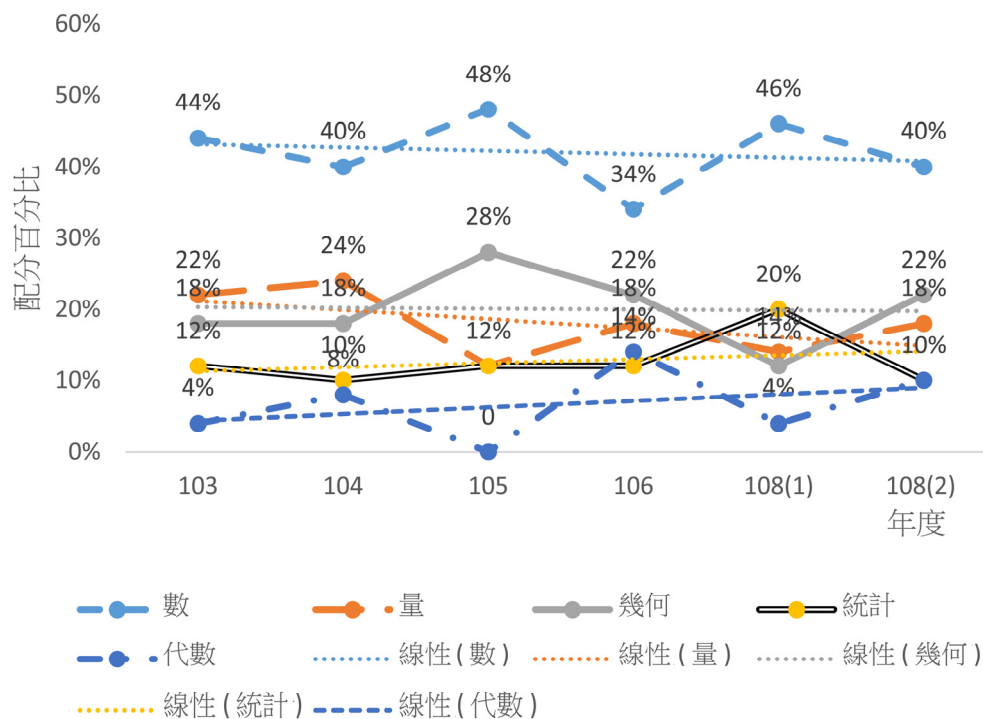


圖 3 歷屆試題在內容向度配分百分比的趨勢圖

二、歷屆試題在知識類別的細目分布

(一) 數學課程知識的細目

表 8 是有關數學課程知識細目的配分百分比，得到的主要研究結果包含：

1. 數學課程知識中以「辨識數學題目的特性」和「了解教材的數學概念」是最常見的試題，分別佔 44%和 38%。「瞭解某教材的數學概念」的試題範例，如 104 年度第 16 題：「有關分數的概念，哪一個數學問題的「單位分數內容物」為 4 顆蘋果？」，是在評量師資生是否理解分數教材中有關「單位分數內容物」的概念。

表 8 數學課程知識細目的配分（百分比）

知識 內容向度	辨識數學題目 的特性	瞭解教材的數 學概念	瞭解某教材的 學習範圍	瞭解教材的先 後順序	合計
數	13 (23%)	5 (9%)	0	3 (5%)	21 (38%)
量	3 (5%)	6 (11%)	1 (2%)	4 (7%)	14 (25%)
幾何	3 (5%)	6 (11%)	0	0	9 (16%)
統計	1 (2%)	0	1 (2%)	1 (2%)	3 (5%)
代數	5 (9%)	4 (7%)	0	0	9 (16%)
合計	25 (44%)	21 (38%)	2 (4%)	8 (14%)	56 (100%)

關於「辨識數學題目的特性」的考題，大多是與數學問題情境或與語意結構相關，這類考題最常出現在數和代數主題，例如，在代數的試題如 104 年度第 18 題：

104 年度第 18 題：

學生初學「加法交換律」時，下列哪一種問題情境最適合用來布題？

- (A) 弟弟有 5 張集點卡，哥哥比弟弟多 4 張，問哥哥有幾張集點卡？
- (B) 弟弟有 5 張集點卡，哥哥有 4 張集點卡，問兩人共有幾張集點卡？
- (C) 弟弟有 5 張集點卡，哥哥又給了弟弟 4 張集點卡，問弟弟共有幾張集點卡？
- (D) 哥哥有一些集點卡，給了弟弟 4 張後還剩下 5 張，問哥哥原來有幾張集點卡？

2. 「了解某教材的學習範圍」是評量師資生有關數學課程知識最少出現的考題。例如 104 年度第 20 題是在評量師資生是否瞭解低年級長度教材的學習內容。

104 年度第 20 題：

依據 97 年數學學習領域課程綱要，有關「長度」教材，下列哪一個數學問題不適合在國小低年級進行教學？

- (A) 請學生測量自己走一步的距離，大概幾公分？
- (B) 請學生估計自己兩臂張開的寬度，是比 1 公尺長或短？
- (C) 請學生用鉛筆測量自己桌子的寬度，大概有幾枝鉛筆長？
- (D) 請學生用尺測量自己桌子的長度，是幾公分？也是幾公尺？

（二）分析學生數學認知知識的細目

歷屆試題中約有 37% 試題是評量師資生的分析學生數學認知知識，當進一步分析 6 項細目的試題配分百分比，如圖 4。得到的主要結果包含：

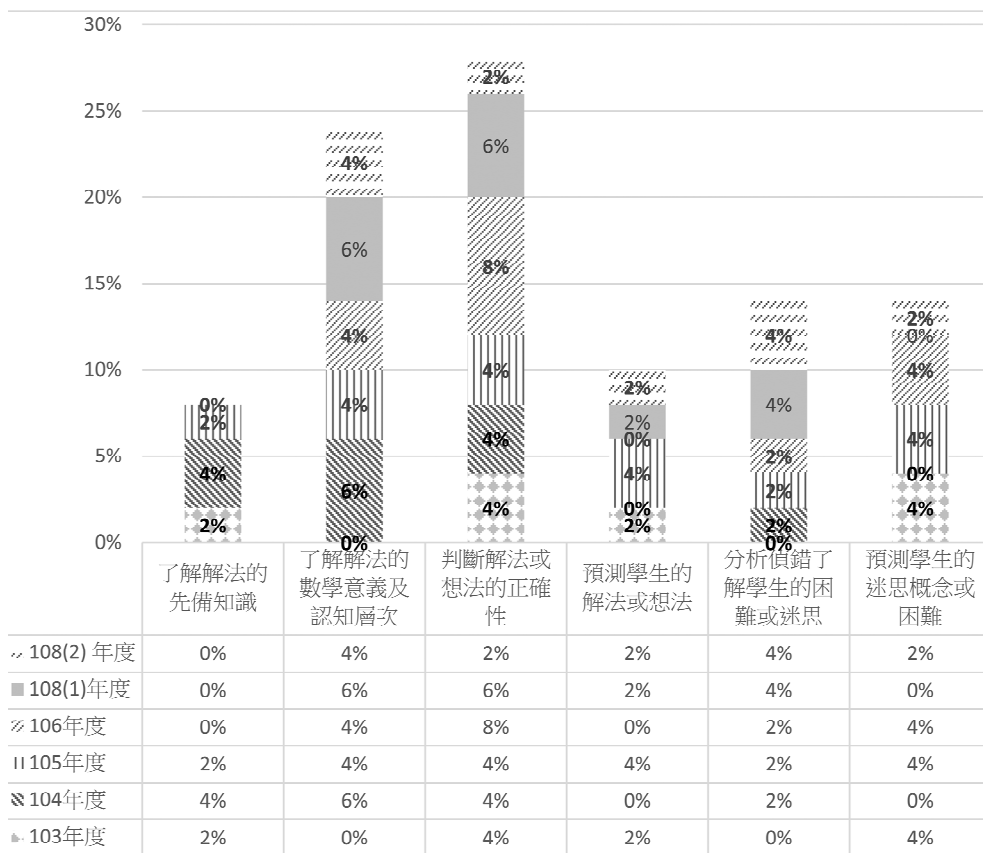


圖 4：分析學生數學認知知識細目試題配分百分比

1. 有關分析學生數學認知知識最常出現的考題是「判斷解法或想法的正確性」佔 28% 和「了解解法的數學意義及認知層次」佔 24%；最為罕見的是有關「了解解法的先備知識」試題，出現在六屆試題的總配分只佔了 8%。103 年度的試題如下：

103 年度第 23 題：

進行「整數的分數倍」啟蒙教學時，下列哪一個最不可能是學生所需的先備知識？

(A) 理解分數的意義 (B) 理解乘法的意義 (C) 認識兩數互質的意義 (D) 分數是兩整數相除的結果。

2. 有關師資生是否理解學生迷思概念的試題，約佔分析學生數學認知知識的 28%，包含師資生是否能預測及分析學生的錯誤解法或迷思，數據是從圖 4 中最後兩個長條圖的加總得到的結果。由此可見我國的數學教材教法試題重視師資生是否能預測學生常見的錯誤或迷思，以及是否能偵錯學生解法的錯誤或迷思的有效教學策略 (Franke et al., 2015)。

(三) 數學教學策略知識的細目

有關數學教學策略知識的各項細目，其試題配分百分比描繪於圖 5。從圖 5 得到的主要發現有：

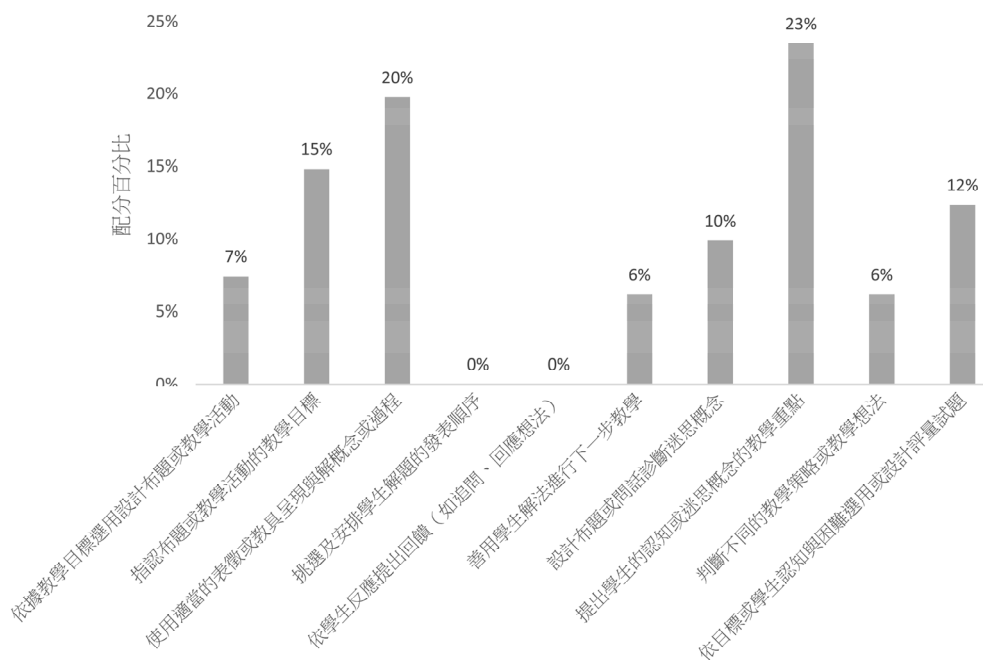


圖 5：數學教學策略知識之細目各試題配分百分比

1. 「提出學生認知或迷思概念的教學重點」是數學教學與評量知識最常出現的考題，佔 23%；其次是「使用適當的表徵或教具呈現與解釋概念或過程」，佔 20%。例如 103 年度第 10 題的子題(2)是用來評量師資生是否能提出有關小學生對小數減法迷思概念以及其補救教學重點為何。

103 年度第 10 題子題(2)：

某生進行「 $10.73 - 0.5$ 」直式計算時，某生列出的直式作法如下：

$$\begin{array}{r} 10.73 \\ - 0.5 \\ \hline 1.068 \end{array}$$

(1) 請指出該生可能的迷思概念為何？【2 分】

(2) 請寫出針對該生的補救教學重點為何？【3 分】

2. 歷屆試題從未評量師資生有關「挑選及安排學生解題的發表順序」及「依據學生的反應提出回饋（如追問、回應想法）」的教學知識，而「善用學生解法進行下一步教學」的試題所佔比重不到一成。

3. 有關「判斷不同的教學策略或教學想法」、「依據教學目標選用設計布題或教學活動」的試題所佔比重偏低，都不到一成。其中「判斷不同的教學策略或教學想法」的試題是在評量師資生能否比較判斷選用適合的教學策略進行教學，例如：108(2)年度問答題第 8 題子題(2)有關統計圖的教學考題如下：

108(2)年度問答題第 8 題子題(2)：

有一關於「繪製百分率圓形圖」的教學布題：（略）

小明很驚訝地發現：「各候選人百分率合計是 $46\% + 20\% + 22\% + 13\% = 101\%$ ，……這樣要怎麼畫百分率圓形圖呢？」

試回答下列問題：

(1) 教師應如何向該學童解釋全體百分率合計是 101%？【2 分】

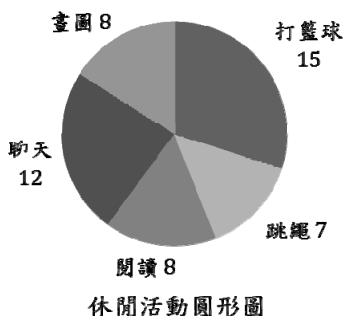
(2) 教師問：「應如何調整百分率來畫出百分率圓形圖？」小英說：「可將甲的 46%調整為 45%。」小華說：「可將乙的 20%調整為 19%。」教師同意兩人的說法，請分別說明教師同意的理由為何？

4. 依據教學目標設計選用試題或設計誘答選項百分比為 12%，試題選項的設計如 104 年度問答題第 11 題：

104 年度問答題第 11 題：

教師想設計一個圓形圖的評量試題，已完成的部分內容如下：

某年級 50 位男生票選最喜歡的休閒活動，其調查結果表示成圓形圖如下：



問下列選項何者錯誤？

- (A)
- (B)
- (C)
- (D)

請利用此圓形圖的資料，幫教師完成一個單選題的四個選項；選項應涉及「(A)比例、(B)百分率、(C)分數、(D)圓心角」的概念。

(四) 數學教材教法評測知識類別與細目

依據以上研究發現，我國師資生「數學能力測驗」之數學教材教法評測知識包含 3 類知識 18 項細目。

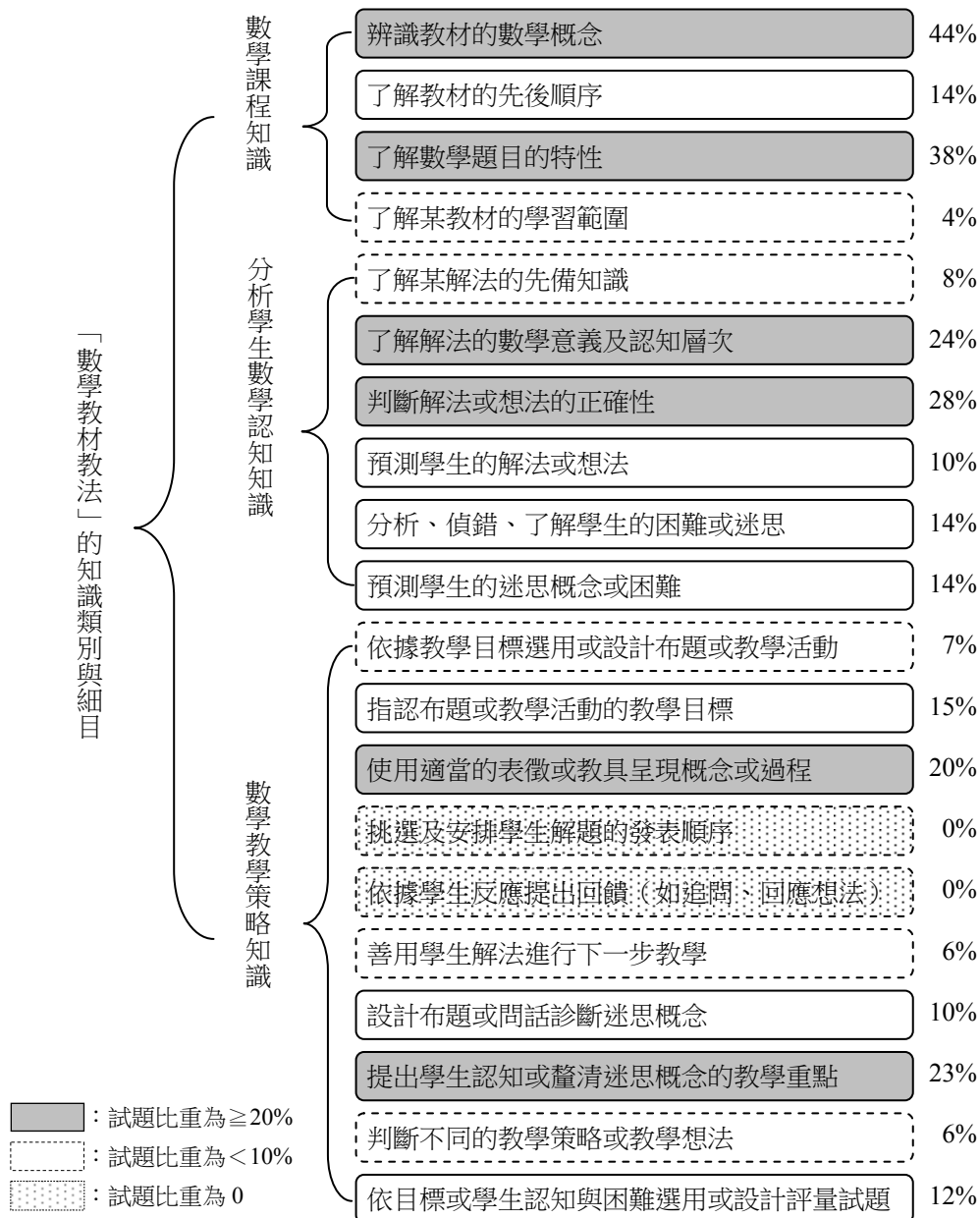


圖 6 「數學能力測驗」數學教材教法知識類別與細目之試題比重分析

相較於文獻分析得到的知識架構，我國數學教材教法知識架構中，增加了 1 項數學課程知識細目「了解某教材的學習範圍」；少了 2 項數學教學策略知識細目：「挑選及安排學生解題的發表順序」及「依據學生的反應提出回饋（如追問或回應想法）。以圖 6 的樹狀圖中 20 個長方形框表示 20 項細目。

1. 比重超過 20%常見試題的細目

比重超過 20%常見的試題分布於 6 項細目，於圖 6 的長方形格子以深色灰底標示。在數學課程知識類別有「辨識教材的數學概念」、「瞭解數學題目的特性」。在分析學生數學認知知識類別有「了解解法的數學意義及認知層次」和「判斷解法或論述的正確性」；在數學教學策略知識類別有 2 項：「使用適當的表徵或教具呈現或解釋概念或過程」和「提出學生認知或釐清迷思概念的教學重點」。

2. 比重少於 10%罕見試題的細目

比重少於 10%的試題細目，於圖 6 的長方形以虛線外框標示。相較於文獻，「了解某教材的學習範圍」佔 4%的題目，無法歸入文獻分析架構中，因此增加 1 項細目。少於 10%罕見試題的細目，在分析學生數學認知知識類別有「了解某解法的先備知識」佔 8%；在數學教學策略知識細目有：「依據教學目標選用或設計布題或教學活動」佔 7%及「善用學生解法進行下一步教學」佔 6%。在數學教學策略知識細目中「挑選及安排學生解題的發表順序」及「依據學生的反應提出回饋（如追問或回應想法）」，是從未出現在我國歷屆的教檢考題，於圖 6 以長方形虛線網狀表示。

陸、結論與討論

一、結論

（一）我國『數學能力測驗』之數學教材教法評測知識類別與細目

從我國「先實後檢」的師資生參加「數學能力測驗」之數學教材教法試題的資料庫分析，研究發現，我國師資生數學教材教法評測知識包含 3 類知識 18 項細目。架構中的知識類別與細目，是我國從教師檢定觀點對於具有教育實習經驗的師資生參加

檢定考試須具備國小教數學的專業知識內涵。知識類別與細目架構可以作為未來「先檢後實」制度下不具有教育實習經驗的師資生參加教檢命題的參考與對照。

將文獻分析架構結合我國數學教材教法知識評測架構後，從 3 個知識類別 19 項細目，擴充為 3 個知識類別 20 項細目，而成為師資生教國小數學需要具備的專業知識內涵，建議我國未來教檢試題宜增加兩個細目「挑選及安排學生解題的發表順序」及「依據學生反應提出回饋（如追問、回應想法）的考題，因為這兩個細目是教師提升數學課堂教學品質的有效教學策略，是教室社會學關注的焦點(Conner et al., 2014)。

「依據教學目標選用或設計布題或教學活動」、「善用學生解法進行下一步教學」、「判斷不同的教學策略或教學想法」，是當前數學教學主張以學生為中心，強調學生的主動思考、重視學生在課堂的對話品質、有利於促進課堂討論的教學策略(Baumert et al., 2010；Franke et al., 2015；Hufferd-Ackles et al., 2015；Lin, 2017)。因此，建議我國未來「數學能力測驗」之教材教法命題增加這 3 項細目的試題比重。而在「先檢後實」教檢制度實施下的師資生，若要增進數學教學實務經驗的學習機會，則需要各師資培育機構落實 107 年度教育部頒布的師資職前培育課程規定開設的「教育實踐課程」12 學分中，以增進師資生於在學期間學習數學教學實務相關知能(教育部，2018)。

(二) 教材教法知識評測以數學教學策略知識所佔比重最少且以問答題居多

雖然數學教材教法的問答題與選擇題配分不同，而且問答題各子題的配分不相等，但經過分析後，無論是以題數百分比或以配分的百分比，得到的結果是一致的。本研究發現，歷屆試題三類知識類別中，數學課程知識和分析學生數學認知知識類別的試題所佔比重差不多，以數學教學策略知識類別比重最少，佔 27%。而且評測師資生的專業知識主要是在數與計算的題材最多，佔 43%。以題型而言，三類知識中，數學教學策略知識類別的試題在問答題的配分所佔比重最多，選擇題最少。可能的解釋有二：(1)命題時可能考量師資生的實務經驗背景較為不足；(2)教學策略知識不易命題，因為小學教學現場的實踐知識，若要成為命題素材，則需要涉及複雜的轉化過程(Orrill et al., 2015)。

二、討論

（一）本研究的貢獻與價值

利用國家層級教師資格檢定考試「數學能力測驗」之數學教材教法歷屆試題資料庫，本研究從評量觀點建立了我國國小數學教材教法知識類別和細目。分別從知識評量架構與試題比重分析說明本研究的三個重要價值：

1. 歷屆試題比重的分析結果，可以用來檢討並反思我國數學教材教法歷屆命題，作為未來大考中心教檢命題的參考；本研究可以成為實施新制「先檢後實」後，持續研究該考科命題趨勢的一筆文獻，以作為未來研究的對照。

2. 國小數學教材教法知識類別和細目的貢獻：對師資培育而言，不僅可以作為師培者規劃國小數學科教材教法課程大綱及決定教學內容的方向參考；對師資生而言，可以提前準備當一位國小教師教數學需要具備的專業知識內涵，及準備該科考試的命題的方向和範圍，以順利通過教檢考試。對研究而言，本研究建立的國小數學教材教法知識類別與細目，可以作為研究職前教師教數學的專業知識內涵的參考。

3. 以國家層級研發「數學能力」測驗試題的臺灣經驗：透過專家群組成命題小組、審題小組、到組題小組等不同委員會，每年研發具有高信效度的數學教材教法評量工具試題，舉行全國性的師資生教師資格檢定考試，臺灣的經驗不僅超越了國內外小型的研究（陳彥廷，2015；Delaney, 2012；Kwon et al, 2012）；而且克服了個人研究所面臨的研發教師知識評量工具的困難與挑戰。諸如：不易研發難易不同程度的試題、不易依指定評量目標研發出需要的試題、不易研發試題的誘答選項、教學動態的教學事件不易轉化為紙筆測驗試題，以及題幹描述不精確容易造成模稜兩可的答案（Delaney；Kersting et al., 2012；Orrill et al., 2015）。因此，臺灣的經驗將可提供給國內外數學教師培育長久關注的議題作參考（Kersting et al.；Orrill et al.），這些議題包含「國小教師教數學需要的專業知識是什麼？」、「如何評量國小教師教數學需要的專業知識？」、「實務性的教學知識如何透過紙筆測驗評量？」這是臺灣教師資格檢定考試對國際數學師資教育的貢獻與價值。

（二）對後續研究的建議

目前國小教師教檢資料庫的使用，因受限於國家教育研究院不對外公開師資生的作答資料庫，僅能使用歷屆試題資料庫進行特性分析，這是本研究的限制。若能取得

歷屆師資生的答題資料庫，對資料進行二階的統計分析，以瞭解不同師資培育機構的師資生在各知識類別及各項細目的實際表現，則將有助於了解我國師資生所表現的教材教法知識在哪一個水平，及數學教材教法的實施成效，有助於師培機構養成教育的課程規劃。因此，建議未來國家教育研究院對於 2020 年以前建立的國小教師資格檢定考試資料庫及 2020 年以後由大考中心建立的教檢資料庫，能比照大型資料庫，如國際數學與科學教育成就趨勢調查 (The Trend of International Mathematics and Science Study [TIMSS]) 資料庫，釋出資料的申請辦法，以讓國內研究生或教育學者進行資料的二階分析，俾能確保我國師資生數學教材教法的培育品質，並提供給各師資培育機構對課程架構和教育實習政策的自我反省與調整的機會。

誌 謝

感謝評審委員提供了寶貴的意見與建議，而提高研究的嚴謹度及增加文本的可讀性；同時感謝編委會委員及責任編輯提供寶貴的觀點和意見，並感謝編輯團隊用心且細心的校對文本內容，提升本論文的品質。

參考文獻

- 王石番 (1989)。淺論內容分析研究的代表性模式和工具性模式。**東方雜誌復刊**，22 (10)，32-40。
- [Wang, S. -F. (1989). The instrumental model and representative model of content analysis. *The Eastern Miscellanea*, 22(10), 32-40.]
- 呂玉琴 (1998)。國小教師分數教學之相關知識研究。**臺北師院學報**，11，393-438。
- [Leu, Y. -C. (1998). The study of knowledge of teaching fraction of elementary school teachers. *Journal of National Taipei Normal University*, 11, 393-438.]
- 李源順、林福來、呂玉琴、陳美芳 (2008)。小學教師數學教學發展標準之探究：學者的觀點。**科學教育學刊**，16 (6)，627-650。

- [Lee, Y. -S., Lin, F. -L., Leu, Y. -C., & Chen, M -H. (2008). The standards for development in elementary mathematics teaching: Perspectives of elementary mathematics educators. *Chinese Journal of Science Education*, 16(6), 627-650.]
- 林碧珍 (2001)。發展國小教師之學生數學認知知識－理論結合實務研究取向的教師專業發展。台北：師大書苑。
- [Lin, P. -J. (2001). *The development of elementary school teachers' knowledge of students' cognition: The teacher professional development of theory integrated into practice*. Taipei: Shtabook.]
- 林碧珍 (2011)。我國小學數學職前教師培育研究總結。載於林碧珍、謝豐瑞（主編），**臺灣小學職前教師培育研究（TEDS-M2008）**（頁 232 -266）。新竹：國立新竹教育大學。
- [Lin, P. -J. (2011). A summary of the study in teacher education for elementary future teacher teaching mathematics. In P. -J. Lin & F. -J. Hsieh (Eds.), *The study of teacher education of Taiwanese elementary future teacher* (TEDS-M2008) (pp. 232-266). Hsinchu: National Hsinchu University of Education.]
- 林碧珍、蔡文煥 (2007)。數學領域實習輔導教師專業標準指標的發展與建立之初探。**新竹教育大學教育學報**，**24**（2），61-91。
- [Lin, P. -J., & Tsai, W. -H. (2007). Exploring in establishment and development of professional standards of mentors. *Journal of National Hsinchu University of Education*, 24(2), 61-91.
- 姚如芬 (2006)。成長團體之“成長”－小學教師數學教學專業之探究。**科學教育學刊**，**14**(3)，309-331。
- [Yao, J. -F. (2006). Investigation of elementary teacher' professional development in mathematics instruction through a community "MTGG". *Chinese Journal of Science Education*, 14(3), 309-331.]
- 高級中等以下學校及幼兒園教師資格檢定考試數學能力測驗試題研發小組（2014）。**103 年國小教師資格檢定首次數學能力測驗分析**。台北：國家教育研究院。
- [The Research and Development Team of Mathematical Competence Test for the Teacher Qualification Examination of High School and Kindergarten. (2014). *The analysis of initial teacher qualification examination in 2014*. Taipei: National Academy for Educational Research.]
- 《師資培育法》（1994）。

[Teacher Education Act. (1994).]

教育部（2014）。中華民國師資培育統計年報。取自：

<https://depart.moe.edu.tw/ed2600/News.aspx?n=C6A181E8F32C2BBA&sms=EA1FA0326D3BA142>

[Ministry of Education. (2014). *Yearbook of the teacher education statistics of the Republic of China*. Retrieved from Ministry of Education Web site:

<https://depart.moe.edu.tw/ed2600/News.aspx?n=C6A181E8F32C2BBA&sms=EA1FA0326D3BA142>

教育部（2018）。中華民國教師專業素養指引—師資職前教育階段暨師資職前教育課程基準。取自：

https://depart.moe.edu.tw/ED2600/News_Content.aspx?n=A441B5D8D12FC242&sms=DED4954864BD81E1&s=708BA2E1CFFE3ED6#

[Ministry of Education. (2018). *The Republic of China teachers' professional qualification guidelines-Teachers' pre-service education stages and teachers' pre-service education curriculum benchmarks*. Retrieved from Ministry of Education Web site:

https://depart.moe.edu.tw/ED2600/News_Content.aspx?n=A441B5D8D12FC242&sms=DED4954864BD81E1&s=708BA2E1CFFE3ED6#

教育部（2019）。高級中等以下學校及幼兒園教師資格考試命題作業要點。取自：

<https://edu.law.moe.gov.tw/LawContent.aspx?id=GL000454>

[Ministry of Education (2019). *The main points of implementation for the teacher qualification examination at senior high school and kindergarten level*. Retrieved from Ministry of Education Web site:

<https://edu.law.moe.gov.tw/LawContent.aspx?id=GL000454>

陳彥廷（2015）。國小教師數學教學知識之個案研究。《科學教育學刊》，23（3），213-239。

[Chen, Y. -T. (2015). Mapping out the integration of mathematics pedagogical content knowledge (MPCK) from two elementary school teachers. *Chinese Journal of Science Education*, 23(3), 213-239.]

陳益興、郭淑芳、陳盛賢、楊思偉、連啟瑞、黃坤龍（2009）。臺灣教育政策回顧與展望：師資培育政策回顧與展望。新北：國家教育研究院籌備處。

[Chen, Y. -H., Kao, S. -F., Chen, S. -C., Yang, S. -W., Lien, C. -H., Huang, K. -L. (2009). *Prospects for education policy in Taiwan: Prospects for teacher education policy*. New Taipei: National Academy for Educational Research Preparatory Office.]

- 張新仁、方德隆、邱愛玲、李芊慧（2007）。師資培育機構評鑑：美國師資培育認可委員會的評鑑制度及其啟示。**高雄師大學報**，**22**，1-20。
- [Chang, H. -J., Fang, D. -L., Chiu, A. -L., & Lee, C. -H. (2007). Evaluation of institutions for teacher education: National council for accreditation of teacher education NCATE. *Kaohsiung Normal University Journal*, 22, 1-20.]
- 張裕程（2016）。臺灣師資培育政策 20 年之回顧與展望（1996~2016）。**學校行政**，**104**，39-57。
- [Chang, Y. -C. (2016). Prospects for teacher education reform in Taiwan (1996-2016). *School Administration*, 104, 39-57.]
- 許德田、張英傑（2004）。二位國小實習教師數學教學專業發展之研究。**國立臺北師範學院學報：數理科技教育類**，**17**（1），1-24。
- [Shiu, D. -T., & Chang, Y. -J. (2004). The study of teacher professional development of two mentors at elementary schools. *Journal of National Taipei Normal University: Branch of Mathematics and Science Education*, 17(1), 1-24.]
- 游美惠（2000）。內容分析、文本分析與論述分析在社會研究的運用。**調查研究**，**8**，5-42。
- [You, M. -H. (2000). Content analysis, textual analysis and discourse analysis in social research. *Survey Research*, 8, 5-42.]
- 劉唯玉（2017）。案例撰寫與討論引導架構促進實習教師反省思考層次之研究。**教育實踐與研究**，**30**（1），71-104。
- [Liu, W. -Y. (2017). A study of using the case writing and discussion guide framework to promote student teachers' reflective thinking. *Journal of Educational Practice and Research*, 30(1), 71-104.]
- 鍾靜、張淑怡、陳幸玫、陸昱任、戴坤邦（2012）。國小數學教師專業標準之建構。**科學教育學刊**，**20**（3），217-239。doi: 10.6173/CJSE.2012.2003.04。
- [Chung, J., Chang, S. -I, Chen, H. -M., Lu, Y. -J., & Tai, K. -P. (2012). The development of professional standards for elementary mathematics teachers. *Chinese Journal of Science Education*, 20(3), 217-239. doi: 10.6173/CJSE.2012.2003.04]
- 鍾靜、趙曉美（2014）。國小數學教學實習輔導內涵之探討。**師資培育與教師專業發展期刊**，**7**(2)，21-48。

- [Chung, J., & Chao, H. -M. (2014). The study of elementary school mathematics teaching mentoring contents. *Journal of Teacher Education and Professional Development*, 7(2), 21-48.]
- Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The Elementary School Journal*, 93, 373-397.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389-407.
- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Uta, K., Stefan, K., Michael, N., & Tsai, Y. -M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom and student progress. *American Educational Research Journal*, 47(1), 133-180.
- Beswick, K., & Goos, M. (2012). Measuring pre-service primary teachers' knowledge for teaching mathematics. *Mathematics Teacher Education and Development*, 14(2), 70-90.
- Bingolbali, E., Akkoç, H., Ozmantar, M. F., & Demri, S. (2011). Pre-service and in-service teachers' views of the sources of student' mathematical difficulties. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 6(1), 40-59.
- Blömeke, S., Kaiser G. (2014). Theoretical framework, study design and main results of TEDS-M. In S. Blömeke, F. -J., Hsieh, G. Kaiser, & W. H. Schmidt (Eds.), *International perspectives on teacher knowledge, beliefs, and opportunities to learn: TEDS-M results* (pp.19-47). Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as "springboards for Inquiry": A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 166-208.
- Bradshaw, L., Izsák, A., Templin, J., & Jacobson, E. (2014). Diagnosing teachers' understanding of rational numbers: Building a multidimensional test within the diagnostic classification framework. *Educational Measurement: Issues and Practices*, 33(1), 2-14.
- Cho, Y., & Tee, F. (2018). Complementing mathematics teachers' horizon content knowledge with an elementary-on-advanced aspect. *Pedagogical Research*, 3(1), 3-3. <https://doi.org/10.20897/pr/85172>

- Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Identifying kinds of reasoning in collective argumentation. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(3), 181-200.
- Delaney, S. (2012). A validation study of the use of mathematical knowledge for teaching measures in Ireland. *ZDM-The Mathematics Education*, 44(3), 427-441.
- Delaney, S., Ball, D. L., Hill, H. C., Schilling, S. G., & Zopf, D. (2008). "Mathematical knowledge for teaching": Adapting U.S. measures for use in Ireland. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(3), 171-197.
- Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R., & Empson, S. B. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 403-434.
- Fennema, L., Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Carey, D. A. (1993). Using children's mathematical knowledge in instruction. *American Educational Research Journal*, 30(3), 555-583.
- Fennema, E., & Franke, M. U. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). New York, NY: Macmillan.
- Franke, M. L., Turrou, A. C., Webb, N., Ing, M., Wong, J., Shim, N., & Fernandez, C. (2015). Student engagement in each other's mathematical ideas: The role of teacher invitation and support moves. *Elementary School Journal*, 116 (1), 126-148.
- Franke, M. L., Webb, N. M., Chan, A. G., Ing, M., Freund, D., & Battey, D. (2009). Teacher questioning to elicit students' mathematical thinking in elementary school classrooms. *Journal of Teacher Education*, 60(4), 380-392.
- Hill, H. C. (2007). Validating the MKT measures: Some responses to the commentaries. *Interdisciplinary Research and Perspectives*, 5(2-3), 209-211, doi: 10.1080/15366360701492914
- Hill, H. C., Ball, D. L., Bass, H., Blunk, M., Brach, k., Charalambos, Y. C., Cole, Y., Dean, C., Delaney, S., Eskelson, S., Goffney, I. M., Lewis, J. M., Phelps, G., Sleep, L., Thames, M., & Zopf, D. (2011). Measuring the mathematical quality of instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14, 25-47.

- Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42, 371-406.
- Hill, H. C., Schilling, S. G., & Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' knowledge for teaching. *The Elementary School Journal*, 105(1), 11-30.
- Hufferd-Ackles, K., Fuson, K., & Sherin, M. G. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(2), 81-116.
- Hufferd-Ackles, K., Fuson, K., & Sherin, M. G. (2015). Describing levels and components of a math-talk learning community. In E. A. Silver & P. A. Kenny (Eds.), *More lessons learned from research: Useful and usable research related to core mathematical practices* (Vol. 1) (pp. 125-134). Reston, VA: NCTM.
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41, 169-202.
- Kersting, N. B., Givvin, K. B., Thompson, B. J., Santagata, R., & Stigler, J. W. (2012). Measuring usable knowledge: Teachers' analyses of mathematics classroom videos predict teaching quality and student learning. *American Educational Research Journal*, 49(3), 568-589.
- Kwon, M., Thames, M. H., & Pang, J. (2012). To change or not to change: Adapting mathematical knowledge for teaching (MKT) measures for use in Korea. *ZDM-The Mathematics Education*, 44(3), 371-385.
- Lee, M. Y., & Choy, B. H. (2017). Mathematical teacher noticing: The key to learning from lesson study. In E. O. Schack, M. H. Fisher, & J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 121-140). Cham, Switzerland: Springer.
- Lin, P. -J. (2017). Fostering novice teachers' knowledge of students' errors on fractions division by using researched-based cases. *Journal of Mathematics Education*, 10(1), 76-91.
- Lin, P. -J., & Acosta-Tello, E. (2017). A practicum mentoring model for supporting prospective elementary teachers in learning to teach mathematics. *ZDM-The Mathematics Education*, 49(2), 223-236.

- Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States* (Anniversary edition). New York, NY: Routledge.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2001). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The author.
- Neuman, W. L. (2000)。社會研究方法：質化與量化取向（朱柔若譯）。台北：揚智。（原著出版於1997）
- Neuman, W. L. (2000). *Social research methods: Qualitative and quantitative approaches*. (R. R. Zhu, Trans.). Taipei: Yang Zhi. (Original work published 1997)
- Ng, D. (2012). Using the MKT measures to reveal Indonesian teachers' mathematical knowledge: Challenges and potentials. *ZDM-the Mathematics Education*, 44(3), 401-413.
- Orrill, C. H., Kim, O. K., Peters, S. A., Lischka, A. E., Jong, C., Sanchez, W. B., & Eli, J. A. (2015). Challenges and strategies for assessing specialized knowledge for teaching. *Mathematics Teacher Education and Development*, 17, 12-29.
- Reynolds, A. (1992). What is competent beginning teaching? A review of the literature. *Review of Educational Research*, 62(1), 1-35.
- Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 225-281.
- Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching: Reflecting on practice with the knowledge quartet*. London, UK: SAGE.
- Schleppenbach, M., Flevaris, L. M., Sims, L. M., & Perry, M. (2007). Teachers' responses to student mistakes in Chinese and U.S. mathematics classroom. *The Elementary School Journal*, 108(2), 131-147.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.

- Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S. L., Bankov, K., Rodriguez, M., Reckase, M., Ingvarson, L., Rowley, G., & Peck, R. (2012). *The teacher education study in mathematics (TEDS-M), findings from the IEA study of the mathematics preparation of future teachers*. Amsterdam, NL: International Association for the Evaluation of Student Achievement.
- Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher education and development study in mathematics (TEDS-M): Conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.
- Van Es, E. A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. In M. G. Sherin, V. R. Jacobs, & R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 134-151). New York, NY: Routledge.
- Zazkis, R., & Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics*, 31(2), 8-13.

投稿收件日：2020 年 10 月 8 日

第 1 次修改日期：2021 年 1 月 22 日

第 2 次修改日期：2021 年 4 月 24 日

接受日：2021 年 4 月 30 日

附錄

試題在教材內容知識細目對應的年度、題號（配分）分類表

五個主題		103	104	105	106	108(1)	108(2)	合計題數 (分數)	合計題數 (總分)
瞭解 數學 問題 的特 性	數與計算	NC103-16 NR103-8-1 (2.5) NR103-8-2 (2.5)	--	NC105-16	NC106-18	NR108(1)-5- 1(2.5) NR108(1)-5- 2(2.5)	NC108(2)-16 NC108(2)-17	c-5(10) r-4(10)	9(20)
	代數	AC103-29	AC104-18		AC106-17		AR108(2)-5- 1(2.5) AR108(2)-5- 2(2.5)	c-3(6) r-2(5)	5(11)
	量與實測	MC103-20	--	--	--	--	--	c-1(2)	1(2)
	幾何	--	GC104-21	GR105-6-1 GR105-6-2 GR105-6-3(1)	--	--	--	c-1(2) r-3(5)	4(7)
	統計圖表	--	--	--	--	--	--	0	0
瞭解 教材 中的 數學 概念	數與計算	--	NC104-16 NC104-17	MC105-19 NR105-5-2(3)	NC106-16	NC108(1)-27 NC108(1)-18	NC108(2)-19 NC108(2)-17	c-7(14) r-1(3)	8(17)
	代數	--	AC104-26	--	--	--	--	c-1(2)	1(2)
	量與實測	MC103-19		MC105-17	MC106-19	MC108(1)-19		c-4(8)	4(8)
	幾何	GC103-21			GC106-20	GC108(1)-21	GC108(2)-21	c-4(8)	4(8)
	統計圖表	--	--	DC105-18 DC105-20	--	--	--	C-2(4)	2(4)
瞭解 教材 先後 順序	數與計算	NC103-17 NC103-18	--	NR105-5-1(2)		NC108(1)-17 NC108(1)-16	--	C-4(8) R-1(2)	5(10)
	代數			--		--	--		0
	量與實測		MC104-19 MC104-27	--		--	--	C-2(4)	2(4)
	幾何	GR103-11-1(5)	--	--	GR106-5-1 GR106-5-2(3)	--	--	R-3(10)	3(10)
	統計圖表	DC103-22	--	--		--	--	C-1(2)	1(2)
瞭解 教材 內容 的範 圍	數與計算	--	--	--	--	--	--	--	0
	代數	--	--	--	--	--	--	--	0
	量與實測	--	MC104-20	--	--	--	--	C-1(2)	1(2)
	幾何	--	--	--	--	--	--		0
	統計圖表	--	--	--	DC106-21	--	--	C-1(2)	1(2)
合計	選擇題	C-8(16)	C-8(16)	C-5(10)	C-6(12)	C-6(12)	C-4(8)	C-37(74)	51(109)
	問答題	R-3(10)	0	Rr-5(10)	R-2(5)	R-2(5)	R-2(5)	R-14(35)	
合計題數（總分）		11(26)	8(16)	10(20)	9(19)	8(17)	6(13)	51(109)	

註：(1) N-數（含代數）、M-量、G-幾何、D-統計圖表。(2) C-選擇題、R-問答題。(3) NC103-16 表示 103 年度以數為主題的選擇題第 16 題。(4) GR106-5-2(3) 表示 106 年度以幾何為主題的問答題第 5 題的子題(2)且該子題配分為 3 分。(5) C-8(16) 表示選擇題共有 8 題合計 16 分。(6) R-3(10) 表示問答題共有 3 題合計 10 分。

