

國小四年級學童 分數概念之診斷教學研究

陳明宏、呂玉琴*

摘 要

本研究旨在探討分數概念診斷教學的成效。研究方法採用教學實驗法，實驗組採用診斷教學，控制組採用小組討論式教學，對國小四年級學童進行分數概念教學。實驗組一班，33 位學生；控制組一班，34 位學生。本研究透過實驗組學童在課堂學習的情況及分數概念後測、學校期中評量的分數試題來檢驗診斷教學的成效。

研究發現，診斷教學法能製造學童的認知衝突，進而達到概念澄清與糾正的效果，有效改善學童的分數迷思概念，主要研究結果如下：

1. 接受診斷教學的學童在分數概念課堂的表現有利於學習。

2. 接受診斷教學的學童在分數概念後測試題的整體分數概念及各子概念的答對率皆高於接受小組討論式教學的學童。

(1)實驗組學童在整體分數概念及單位量概念、等值分數概念的表現上顯著優於控制組。

(2)兩組學童在等分概念及簡單分數概念的表現上沒有顯著差異。

3. 接受診斷教學的學童在期中評量分數試題的整體分數概念及各子概念的答對率皆高於接受小組討論式教學的學童。

(1)實驗組學童在整體分數概念及等值分數概念的表現上顯著優於控制組。

(2)兩組學童在分數類別辨識、單位轉換及簡單分數概念的表現上無顯著差異。

根據研究結果，本研究對診斷教學活動設計、教材、教學、師資培育以及未來的研究方向提出一些建議。

關鍵詞：診斷教學、認知衝突、迷思概念、等分、簡單分數、單位量、等值分數

* 陳明宏：桃園縣南門國小教師

呂玉琴：國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系教授

投稿收件日：94 年 03 月 30 日；修正日：94 年 06 月 15 日；接受日：94 年 06 月 27 日

國小四年級學童 分數概念之診斷教學研究

陳明宏、呂玉琴*

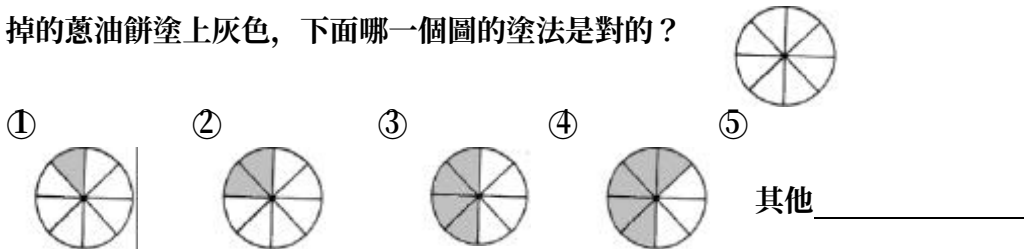
壹、研究動機與目的

在數學教育研究中,「分數」向來是備受數學教育學者所重視的研究主題之一,且在日常生活、數學與自然科學的教材中,都可以發現分數是很常用的重要概念。然而無論國內(如:楊壬孝,1989;林福來、黃敏晃、呂玉琴,1996)、國外(如:Columba,1989;Hunting,1983)的研究報告都指出兒童學習分數是困難的。

分數概念含有眾多的子概念,如:等分概念、單位量概念...等,而這些子概念又牽涉「連續量」與「離散量」的不同情境。學童在學習分數時,雖然花了很長的時間來學習,學習效果卻不好。研究者在國小中年級的教學經驗中發現,部分學童在處理分數問題時,存在著許多迷思概念,如判斷是不是平分、內容物和單位量的單位詞混淆等問題。

除了研究者在課堂上所發現的這些迷思概念外,研究顯示(黃靖瑩,民92)全國國小中年級學生的分數概念還存在許多的迷思概念,例如:

[問題一] 媽媽買了 1 個蔥油餅(如右圖),哥哥吃掉了其中的 $\frac{1}{4}$ 。把哥哥吃掉的蔥油餅塗上灰色,下面哪一個圖的塗法是對的?



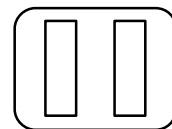
* 陳明宏:桃園縣南門國小教師

呂玉琴:國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系教授

問題一可以用分數的原始意義， $\frac{1}{4}$ 是將物品平分成四份中的一份來解題，亦即將 8 塊平分成四份，其中一份即 2 塊。雖然問題一可以用分數的原始意義來解題，而且問題一和某版本數學教科書四上的活動“一盒綠豆糕 18 個，平分成 9 份，一份是幾個綠豆糕？”有相似的解題基礎，但四年級學生的答對率卻只有 31%。又如：

[問題二] 一盒巧克力有 2 條。小明拿了 $\frac{1}{2}$ 盒，小華拿了 $\frac{1}{2}$ 條。請問小明和小華得到的一樣多嗎？

- ① 一樣多 ② 小明多 ③ 小華多 ④ 無法比較誰多
為什麼？_____



全國四年級學生在問題二的答對率為 18%，其中高達 75% 的學生認為小明和小華得到一樣多，亦即學生沒有注意到 $\frac{1}{2}$ 盒和 $\frac{1}{2}$ 條的單位量不同。然而某版本四上數學教科書曾提供不同單位量比較的活動，如“一包餅乾有 15 個，文文吃了 $\frac{1}{5}$ 包，宜平吃了 6 個，想想看，宜平和文文誰吃的比較多？”。那麼，為什麼學生會出現這樣的學習表現呢？

由於出現上述學習表現的學生都是接受 82 年版的數學教科書，雖然 82 年版的數學課程教育目標建議的教學方法，其中有「教師應檢驗兒童學習新單元時的既有經驗與知識，必要時進行補強；對於新單元內兒童容易錯誤的部分，應探討其形成原因，進行診斷教學」。但各版本數學教科書的活動設計中雖然包含了學童的個別或小組解題、小組或全班討論、發表等活動（簡稱小組討論式教學），但是並沒有強調和「引起認知衝突」有關的「診斷」教學活動。多年來，國內外皆有學者進行診斷教學的研究，成效都不錯，如：林福來、郭汾派與林光賢（1985）、李源順（2001）、Bell（1993）等。因此，本研究希望透過和「引起認知衝突」有關的「診斷」教學活動來協助四年級學生的分數概念學習，亦即本研究的目的是探討：

國小四年級學童分數概念在診斷教學下的學習成效。

根據上述的研究目的，本研究所要探討的具體問題有：

1. 在診斷教學活動中，學童的分數概念學習情況為何？

2. 接受診斷教學的學童在分數概念後測試題的表現上是否優於接受小組討論式教學的學童？

3. 接受診斷教學的學童在學校期中評量測驗分數試題的表現上是否優於接受小組討論式教學的學童？

貳、文獻探討

一、診斷教學

(一) 診斷教學原則

Bell (1992) 認為診斷教學的理論是承襲 Piaget 的認知發展理論，從學童已有的知識基礎出發，讓學童在學習的過程中，發覺錯誤的概念，引起認知上的不平衡，進而獲得適當的調適，成為新的概念結構。因此，提出診斷教學的原則如下：

1. 初始學習作業的呈現，須讓學童從以前的學習經驗中有跡可循；
2. 選擇的作業要涵蓋關鍵的概念和可能的錯誤概念；
3. 設計適當的活動使有錯誤的學童引起認知衝突；
4. 提供一些正確的回饋；
5. 針對欲化解的衝突加強討論，並形成一個新的整合的知識結構；
6. 在所討論的課程內明確的形成關鍵原則；
7. 利用進一步的問題做回饋，以鞏固洞察的獲得；
8. 利用彈性的問題，以確保對不同初始概念了解層次的學生都有適當的挑戰層次；
9. 在未來的場合中，適時重返相同的概念點（包括利用不同的脈絡或情境），直到產生持久和可轉移的了解。

林福來 (1992) 對診斷教學的看法呼應了 Bell (1992) 的觀點，亦提出了幾點診斷教學原則：

1. 教學設計之前，不僅要分析欲教的解題方法，同時要詳細描述學童自己發展的解題策略；
2. 教學設計要能凸顯學童自己發展的解題策略的侷限性，使欲教的解法有明顯的學習動機；

3. 教學活動的次序安排，以及從多種解題策略中選取欲教的某種策略，原則上都要盡量減低學童的工作記憶量；
4. 學習過程中，學童要有資源可以自我檢查自己的答案是否正確；
5. 對於學童共同常犯的錯誤，教學設計務須使學童有機會主動察覺自己錯了，立即產生認知衝突。

（二）診斷教學法

診斷教學的目的主要在透過所設計的教學活動，讓學童發現自己的錯誤概念，促使學童改變其原始的錯誤概念，並使學生的概念調整正確，即所謂的概念改變。其呈現的教學法如下：

1. BDEI 概念改變教學法

Hewson, M.G., and Hewson, P. W. (1983) 認為要改變學童的錯誤概念，必須先找出學童具有的錯誤概念，再利用概念改變策略進行教學。其教學方式是從學童的迷思概念出發，並依序使用概念溝橋 (B)、區別 (D)、替換 (E)、整合 (I) 等四個教學策略來進行教學，其中的替換策略即讓學童發現自己現存概念的不合適處，並發現新概念更能解釋現象。

2. 異例 (discrepant event or anomaly) 教學法

Tirosh and Stavy (1996, 1999) 透過「異例」來誘發學童在面臨數學問題時產生概念上的衝突，以糾正學童的錯誤概念。在教學上，希望經由此種認知衝突的歷程，學童可以察覺其既有知識和正統知識間的差異，藉此幫助學童重建其認知結構。其教學程序有製造暴露事件、引入異例、調適期等三階段。

3. 新奇問題 (novel problems) 的問題教學法

Niaz (1998) 指出，若要讓學生產生概念改變，教師必須提出「新奇問題」讓學生來回答，因為處理該問題的過程必須涉及推理及討論，具有反省的效果，且較能引發學生的迷思概念，產生認知衝突，進而引起學生認知發展及重建認知基模系統的動機。

4. 合作學習法

合作學習是一種教學環境，可藉由個人和團體誘因來促進學生從事結構化的作業，以增進小組成員間的幫助行為 (Slavin, 1984)。而 Piaget, Inhelder, and Szeminska (1960/1970) 認為兩個認知實體之間的衝突可以導致認知的調整。

從上述文獻探討，我們發現診斷教學在活動的設計上，無論採異例或新奇問題，在教學策略上，無論採個人解題或合作學習，其教學的核心都是要使學生經由原有迷思概念與正式概念在認知結構之交互作用下產生認知衝突，引起學童在

認知結構上的不平衡, 進而使原有迷思概念澄清、改變。因此, 本研究在教學活動的設計、進行方面, 應特別注意是否能引起學生的認知衝突及概念的澄清、改變。

二、診斷教學實驗

(一) Kerslake (1987) 分析學童在分數概念上的錯誤類型後, 進一步對有迷思概念的學生進行診斷性的面測, 根據這些面測資料及 Piaget 的平衡理論設計診斷教學活動, 對 13 至 14 歲的學童進行單組的教學實驗。教學實驗中所要進行的分數概念教學主要有分數是兩數相除的結果、等值分數概念及分數是數的概念。在教學過程中, 教師儘可能提供多樣性的分數例子並以不同的方式來呈現分數, 儘可能讓學童討論學童之間錯誤的解題策略及迷思概念, 而且鼓勵學童在他們對一些問題的回答上, 做觀察與判斷歸納的工作。教學實驗的研究結果, 如表 1。

表 1 學童在 Kerslake 的教學實驗的三項測驗的答對率比較

項 目	前測	後測	延後測
分數是兩數相除的結果	29.0%	64.6%	52.2%
等值分數	39.6%	59.8%	60.9%
分數是數	34.8%	57.9%	61.7%

由上表的研究結果顯示, 學童在後測與延後測的表現比前測表現進步 20% 以上, 可見診斷教學確實能夠及時改正學童的迷思概念並鞏固學習成果。

(二) Bell (1993) 曾對 10-11 歲學童做過有關分數加法等主題的診斷教學實驗。他選擇前測成績及先備知識相當的兩個班級, 一班當實驗組, 一班當控制組, 且由相同的教師實施教學活動。控制組使用學生個人記事圖表的引導發現方式來進行教學; 而實驗組則以挑戰、衝突、辯證及討論的診斷方式來進行教學。診斷教學活動結束後, 立即進行後測, 並於七週後進行延後測。兩組施測的結果, 如表 2。

表 2 學童在 Bell 的教學實驗的表現與統計檢定

分 組 別	項 目 數	平均分數 (Max 40)			平均進步	
		前測	後測	延後測	後-前	延-前
控制組 (N=14)		18.3	20.1	15.0	+1.8*	-3.3**
實驗組 (N=13)		17.7	21.2	21.4	+3.5*	+3.7**

* $P < .05$, ** $P < .01$

由上表的研究結果顯示，經過診斷教學後，實驗組不管在後測或延後測的表現都比控制組還要好，而且控制組學童的正確的分數概念會隨時間而減退，反觀實驗組學童的正確分數概念會持續長久的時間。

(三) Francisco, Sandra, and Alina (2002) 為了探究透過多樣性情境的問題來改善學童分數的了解，將 57 位平均年齡 8-10 歲的低年級學童分為以下三組進行教學實驗：

1. 實驗組 (EG)：實驗前未學習過分數概念的 19 個 3 年級學童，進行以問題解決的情境與討論解題過程 (尤其是學生的錯誤想法) 的活動為基礎的實驗教學。
2. 控制組 (CG)：實驗前未學習過分數概念的 20 個 3 年級學童，只進行前測及後測，不進行教學活動。
3. 參照組 (RG)：實驗前以傳統方法正式學習過分數概念的 18 個 4 年級學童，一樣以傳統方式接受分數概念教學活動。

三組學童的前測及後測的施測結果與統計檢定，如表 3。

表 3 Francisco et al. 教學實驗中學童前後測的表現與統計檢定

總答對次數 組別 項目	實驗組 (n=285)	控制組 (n=300)	參照組 (n=270)	Mann-Whitney test 檢定		
				實-控	實-參	控-參
前 測	29 (10.2%)	36 (12%)	29 (10.7%)	.6080	.7330	.7502
後 測	199 (69.8%)	37 (12.3%)	86 (31.8%)	.0000**	.0000**	.0000**
Wilcoxon test 檢定	.001**	.5014	.003**			

* $p < .05$, ** $p < .01$ ("n" 表答題總次數)

由上表得知，實驗組及參照組學童的表現較控制組學童好，而實驗組學童的表現又比參照組學童的表現好。同時，控制組在前-後測中無顯著差異；相反的，實驗組與參照組在前-後測中均有顯著差異，此兩組的學童在經過指導後均有明顯的進步，然而在後測的表現上，實驗組學童比參照組學童進步較多。

(四) 林福來、黃敏晃與呂玉琴 (1996) 先探討學童學習分數的先備知識，再進行分數啟蒙的教學實驗，以協同行動研究讓參與研究的國小教師親自參與設計教學活動及進行單組實驗教學。其研究可分為以下四大歷程：

1. 確認學童分數概念啟蒙前的學習認知困難。
2. 發現學童分數的解題行為，符合診斷教學的假設。

3. 形成發展分數啟蒙教案的參考事項。

4. 建立分數的啟蒙教案。

在分數啟蒙的學習中, 從以下幾點的教學實驗結果, 我們可以看出診斷教學是有效的:

1. 以分東西的實例引入教學活動, 和學童的生活經驗相契合, 學童表現出高度的學習興趣;

2. 學童在自行解決教學活動中所提出的問題時, 同一個問題能發展出多種解題策略;

3. 約 90% 的學童能處理連續量四等分、離散量五等分、五片海苔二等分、七片口香糖三等分的分數問題;

4. 約 70%~90% 的學童能處理連續量五等分, 並用分數語言描述; 在呈現圖卡的情境下, 能辨認單位量。

除了上述有關分數概念的診斷教學研究之外, 江南青(1986)曾對台北市的一、二年級國中生以操作和啟發式的教學方法進行比例概念的診斷與補救教學研究, 以改正學生的「加法策略」。李源順(1996)利用電腦動態幾何輔助軟體 GSP 對四位國小二年級學童進行三角形錯誤概念的診斷教學; 以及李源順(2001)依據診斷教學的原理, 對師院數理系、幼教系, 以及特教系的學生進行小數的診斷教學實驗研究, 目的在於了解診斷教學策略是否能破除學生對 $0.9999... < 1$ 的迷思概念。陳雪華(2002)利用 GSP 電腦軟體進行國小四年級學童在直觀面積概念的動態診斷教學研究。以上的研究都證明診斷教學確實能夠改正學生的迷思概念。

從上述文獻探討中, 我們發現有些診斷教學是以單組方式進行, 其教學成效有的以前測、後測、延後測的量化方式呈現 (Kerslake, 1987), 有的以質化資料, 即學生在課堂的表現來說明 (林福來、黃敏晃與呂玉琴, 1996)。有些診斷教學是以實驗組、控制組的方式進行, 並以同一份試卷作前測、後測, 甚至延後測的方式, 比較學生在(延)後測與前測的差異來說明教學成效。從研究法來看, 採雙組的教學實驗設計比單組的設計更具實驗成效的說服力 (林清山, 1989)。因此本研究採實驗組、控制組的教學實驗設計。在呈現教學成效方面, 除了比較二組學生的量化資料外, 本研究亦呈現實驗組學生在課堂上的表現, 質量並重。

三、分數概念

本研究將中年級學生的分數概念分為等分概念、簡單分數概念、單位量概念

以及等值分數概念等四種主要子概念來作探討。

(一) 等分概念

Bergeron and Herscovics (1987) 的研究顯示兒童的等分概念並不完備，比如大部分國小三年級學童在處理分數板的問題時，只注意到分數板分割成幾塊，而沒有注意到分割的每一部分是否相等。

黃靖瑩 (2003) 對全國國小中年級學童進行分數概念的施測，發現在等分概念上有較多的學童對未等分的分數問題有迷思概念。例如：

() 姊姊買了一些糖果，她把全部的糖果分成 3 堆 (像右圖的樣子)，請問其中 1 堆是不是全部糖果的 $\frac{1}{3}$ ？



- ①是。因為分成三堆，其中一堆就是 $\frac{1}{3}$ 。 ②是。因為只有第三堆不是 $\frac{1}{3}$ 。

③不是。因為沒有平分成 3 堆。④不是。因為沒有 1 堆是 3 個。 ⑤其他_____

表 4 四年級學童解具分數符號的糖果等分問題的測驗結果

選項	1	2	3	4	5
四年級選答率	16.05%	15.23%	37.20%	25.10%	6.42%

如表 4，國小四年級學童答對率為 37.20%，主要的錯誤類型是將 $\frac{1}{3}$ 解釋為 1 堆有 3 個。其次是學童認為只要分成 3 堆，其中一堆就是 $\frac{1}{3}$ ，而忽略每堆個數是否相等。

(二) 簡單分數概念 (簡單分數：單位分數內容物為單一個)

Piaget, Inhelder, and Szeminska (1960/1970) 認為學生在了解部分/全部和部分/部分的關係時，必須經過一些階段的學習，Piaget 稱這些階段為先期基模 (anticipatory scheme)。先期基模使學童有能力了解部分/全部和部分/部分的關係，用以處理分割問題，學童先會二等分，接下來是四等分？三等分？五等分？六等分。Piaget et al.亦發現，孩童在處理長度和面積有關的分數問題時，先會處理 $\frac{1}{2}$ ，然後是 $\frac{1}{4}$ ？ $\frac{1}{3}$ ？ $\frac{1}{5}$ ？ $\frac{1}{6}$ 。

黃靖瑩 (2003) 發現全國國小四年級學童在簡單分數概念上的學習表現不錯。例如：

() 小智把 1 條長方形蜂蜜蛋糕平分成 4 份，那麼其中 3 份可以說是多少條蛋糕？



- ① $\frac{1}{4}$ 條 ② $\frac{1}{3}$ 條 ③ $\frac{3}{4}$ 條 ④ 3 條 ⑤ 其他 _____

表 5 長方形蜂蜜蛋糕問題的測驗結果

選項	1	2	3	4	5
四年級選答率	3.13%	2.72%	91.69%	2.22%	0.25%

由表 5 可知四年級學生的答對率在 90% 以上, 學習表現相當不錯, 但仍有部分學生受題目數字的影響而選 $\frac{1}{4}$ 條或 $\frac{1}{3}$ 條的答案。

(三) 單位量概念

Figueras, Filloy, and Voldemoros (1987) 及 Figueras (1989) 將學童指認單位量的困難分成以下三種類型 (摘錄自呂玉琴, 1991):

1. 忽略給定的單位量。例如, 學童無法看出整個圖形是單位量, 而將圖形二分為陰影部份及空白部份, 並視分數為這二部份的比較結果。

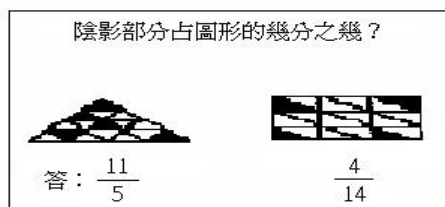


圖 1 忽略給定的單位量之錯誤類型

2. 受分子控制。學童只考慮到問題中的分子, 解題過程深受分子的影響。例如圖 2 中, 學童只看到著色葡萄的個數而回答「1/5」。



圖 2 受分子控制之答題類型

3. 受分母控制。學童只考慮到問題中的分母，解題過程深受分母的影響。例如圖 3 中，學童受分母是 4 的影響而圈出四朵花朵。



圖 3 受分母控制之答題類型

(四) 等值分數概念

全國國小四年級學童在等值分數概念上，確實有迷思概念存在，例如（黃靖瑩，2003）：

（ ）6 顆糖果裝一包， $\frac{1}{3}$ 包有幾顆？

①1 顆 ②2 顆 ③3 顆 ④4 顆 ⑤其他_____

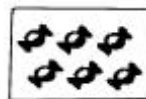


表 6 四年級學童解糖果問題的測驗結果

選項	1	2	3	4	5
四年級選答率	18.85%	47.49%	25.84%	3.79%	4.03%

如表 6，國小四年級學童答對率為 47.49%，主要的錯誤類型為選項③3 顆，學童受分母的控制，而未將 6 顆糖果視為全部；其次錯誤類型為選項①1 顆，學童受到分子的控制。

游政雄（2002）亦曾獲得類似的結果，他透過訪談，發現有些學童認為六的一半就是三（分母），然後一（分子）就是其中一半，所以選「3 顆」，也有些學童認為三分之一包，就是一包裡面有三顆，所以選「3 顆」。另外，有些學童認為三分之一包就是三顆裡面的一顆，受到分子的控制，所以選「1 顆」。

游政雄（2002）亦發現在做單位分數大小比較問題時，很多學童是根據分母的大小來進行比較，而造成其解題錯誤。例如：

T：這一題，你怎麼知道四分之一條比較長？

S3025：因為四分之一比二分之一大。

T：你怎麼知道？你是看哪裡？

S3025：因為四比二大。

全國國小四年級學生在上述四個分數子概念的表現，如表 7 (黃靖瑩, 2003)。

表 7 整體分數概念及分數各子概念答對率

概念	整體分數 概念	等分 概念 (7 題)	簡單分數 概念 (6 題)	單位量 概念 (5 題)	等值分數 概念 (8 題)
答對率	61.98%	63.61%	87.48%	54.06%	46.37%

從上述文獻探討中除了了解學生在分數各子概念的迷思概念外，還發現台灣國小四年級學生在分數的四個子概念中，等值分數的表現最差，其次是單位量概念。由於等值分數是四年級分數概念的學習目標之一，因此，本教學實驗將加強等值分數概念的活動設計。又由於單位量概念是分數概念中最重要的子概念，因此，單位量概念的學習也需加強。同時，在活動的進行中應注意學生是否會受分子、分母的影響。

參、研究方法

一、研究方法

本研究採取準實驗設計 (林清山, 1989)。選定一整個既有班級為實驗組，並選擇另一整個既有班級為控制組，研究方法採教學實驗法。

在教學方法方面，控制組採用現行教科書的教學方法，進行學童的解題、討論、發表等 (簡稱小組討論式教學法)。實驗組採用診斷教學法，除了現行教科書的解題、討論、發表外，更重視在活動中「引起學生認知衝突」的「診斷」教學的設計。為了避免受教師的數學教學素質及人格特質的影響，二班教師由同一人擔任。

為了了解教學實驗的成效，在量化方面，本研究除了以學校數學成績來檢驗二班學生在教學實驗前的數學能力是否相當外，在教學實驗後，並以分數概念試題及學校期中評量的分數試題來檢驗是否實驗組的表現優於控制組。前者是從學術的角度讓該試題涵蓋分數概念的重要子概念，以全面的了解學生在分數各子概念的學習表現。後者是從學校的角度看學生的表現，畢竟教師、家長與學生重視的是學校的成績表現。如果教學實驗的結果能讓學生的分數概念更清楚，但卻無

法在學校的分數單元的考試中勝出，這樣的教學實驗仍較難被教師所接受。在質的方面，本研究將呈現實驗組學生的課堂表現。

二、研究對象

研究對象選擇桃園縣某國小四年級兩個常態班級。為使研究結果能有效的解釋診斷教學的成效，我們以該校九個班級的上一學期的期中、期末數學評量的平均成績作比較，選出平均成績差異最小的二個班級。經獨立樣本 T 檢定的檢驗(表 8) 發現二班的數學能力相當，無顯著差異。

表 8 兩組學童上一學期兩次學校評量數學成績的 T 檢定

組 別	平均數 標準差		變異數檢定		平均數檢定		
			F 檢定	顯著值	自由度	t 值	顯著值
實驗組(N=33)	89.091	12.306					
控制組(N=34)	87.735	13.762					
實驗組與控制組			1.113	.295	65	-.425	.673

* $p < .05$, ** $p < .01$

實驗組有男生 17 人，女生 16 人，共 33 人。控制組有男生 19 人，女生 15 人，共 34 人。

三、研究工具

(一) 診斷教學活動設計

本研究的診斷教學活動設計由研究者根據文獻、教材、專家意見、研究者本身教學經驗、四年級學童分數迷思概念及診斷教學原則等進行設計。

控制組的教學目標採教科書之分數單元目標為：

1. 在等分好、整體 1 能明顯出現之具體情境中（包含連續量、離散量），能以真分數來描述單位分數內容物為多個個物的幾份。

2. 能進行同分母真分數的合成、分解、比較活動。

3. 能理解等值分數的意義。

控制組的教材採國小四上數學教科書的分數教材，其主要內容包括：

1. 等分概念。如：一盒綠豆糕 18 個，平分成 9 份，一份是幾個綠豆糕？

2. 簡單分數概念。如：把量杯的水平分成 4 份，做一個蛋糕要 1 份，是 $\frac{1}{4}$ 杯，做 3 個蛋糕要 3 份，是多少杯？

3. 單位量概念。只要含有二個不同單位的分數問題時, 都會涉及單位量辨識的活動, 但教材中並沒有特別針對「單位量」設計的活動。

4. 等值分數概念。如:

(1)一包餅乾有 15 個, 文文吃了 $\frac{1}{5}$ 包, 宜平吃了 6 個, 想想看宜平和文文誰吃的比較多?

(2) $\frac{10}{10}$ 公分和 1 公分一樣長嗎?

5. 其他:「真分數、假分數和帶分數的辨別」。

從文獻探討得知中年級學生在等值分數概念及單位量概念上有諸多學習困難, 而這些學習困難又符合診斷教學的假設。如: 某些錯誤觀念在同一年齡群中非常普遍 (黃靖瑩, 2003); 學生一旦因某種想法而使用錯誤的解題策略, 就傾向於一致地使用, 可謂根深蒂固, 難以改變 (黃靖瑩, 2003; 詹婉華, 2003)。因此, 實驗組的教學目標除了含控制組的教學目標及加強等值分數概念外, 還增加:

1. 單位量概念: 能在離散量的具體物中, 清楚分辨「單位量」與「單位分量」的單位詞, 並能作正確的單位轉換。

2. 能將「 $\frac{1}{2}$ 」和「一半」的生活語言相連結。

本研究的教學實驗活動, 不但要糾正學童的分數迷思概念, 還要顧及學童原有課程的學習, 因此將原來課本中的分數教材活動作以下的合併及調整:

1. 本研究在等分概念主要是診斷「未等分」的分數問題, 因此, 課本的綠豆糕的平分活動就簡單帶過, 再補充未等分的分數問題。

2. 課本的蛋糕的活動, 併入簡單分數概念的診斷教學活動。

3. 增加原來教材中沒有的「單位量」教學活動。如: 一盒蛋糕有 4 條小蛋糕, 小明拿了 $\frac{1}{2}$ 盒蛋糕, 小華拿了 $\frac{1}{2}$ 條蛋糕, 請問小明和小華拿得一樣多嗎?

4. 課本的餅乾的活動和長度的活動, 雖然與等值分數概念有關, 但本研究認為應將更基礎的等值分數概念加以澄清, 再來學習此二活動, 因此本研究先進行如下問題, 再視時間多寡將上述二活動簡單帶過或當作回家作業。

相同的八塊餅乾, 若妹妹吃掉了這些餅乾的 $\frac{1}{2}$, 那妹妹吃掉幾塊餅乾呢?

5. 「真分數、假分數和帶分數的辨別」的活動, 雖然不屬於本研究的診斷教學範圍, 但為控制組的教學目標及學校評量範圍, 因此, 課堂中也利用一點時間進行此教學活動。

在教學實驗中, 實驗組的教師除了使用教科書的問話外, 更須要使用額外的

語詞，如「你認為這樣對嗎？」、「那...可不可以？」、「你可以說明...和...的不同嗎？」、「你還有沒有別的解法？」、「那如果...呢？」的用語，讓學童引起認知衝突。

（二）分數概念後測試題

本研究以“國小中年級學童分數概念試題”（黃靖瑩，2003）為後測試題，著重在等分、簡單分數、單位量以及等值分數概念上。此份試題經呂玉琴教授及兩位任教國小中年級數學多年的數學老師，確認整份試題內容具有代表性，並具內容效度。且試題的 Cronbach α 信度為 0.839，顯示此份研究工具具備了良好的信度。

（三）學校期中評量的分數試題

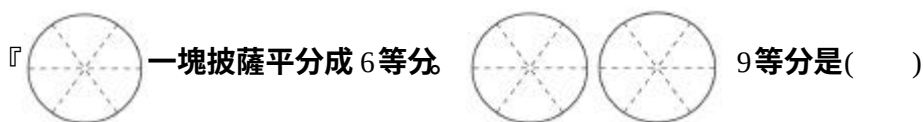
本研究之學校期中評量的分數試題，有 16 小格，共 38 分，其分類與後測分數試題的概念分法有些許不同，研究者將這些分數試題成分數類別的辨識、單位轉換、簡單分數及等值分數四類：

1. 分數類別的辨識：試題在於分數種類（真分數、假分數、帶分數）

之辨識，如『 $\frac{8}{10}$ 是真分數、帶分數或假分數？』。

2. 單位轉換：解題必須瞭解「公分」與「毫米」的單位關係，才能作進一步的換算，如『 $2\frac{5}{10}$ 公分等於()公分()毫米。』。

3. 簡單分數：單位分數內容物為單一個，如



塊披薩（請以分數表示）。』。

4. 等值分數：如『把整數寫成分數 $7 = \frac{(\quad)}{2}$ 』。

四、研究中的試教過程

試教之目的在了解研究者設計之診斷教學活動是否合乎診斷教學的原則，並作為活動設計修正之參考。試教班級為桃園縣某國小四年級一班；並敦請該班之導師為教學者，進行四節課共 160 分鐘之試教。經與該班導師晤談試教的過程與學童的表現，該班導師認為，經由診斷教學的小組討論、辯證與澄清活動，學生

學習的興趣明顯增強，學童發表的情形變得踴躍；該班導師對學童整體的表現覺得滿意。除此之外，研究者亦發現：

1. 學童的發言踴躍，且想法多，但時間限制，導師急於統整說明，顯得過於匆忙，造成活動進行不夠順暢。
2. 學童的發言過多，導師介入的時機不恰當或介入過多，造成上課時間過於緊湊，學童思考反省的時間過短。
3. 教學活動過程中，教師所提問的話語，讓學童能夠清楚呈現迷思概念，但關鍵的話語不多，以致學童產生認知衝突的情形並不明顯。
4. 在教學過程當中，除了發現學童的迷思概念外，也意外的發現學童不同的解題策略。

由以上的試教發現，診斷教學確實能夠引起學童的學習興趣；研究者參考試教的發現，適時修正診斷教學，具體說明如下：

1. 在進行教學實驗之前，教師須熟練診斷教學活動內容及流程，並事先掌握課堂上所可能發生的情況，以期正式教學時能夠掌控得宜。
2. 教師須於小組討論時，請組長整理組員的各種意見想法，避免同樣的意見重複發言。
3. 在診斷教學的活動設計中，需審慎考量教師介入的時機，此時機應該是學童討論辯證中已經有了初步的結果或是無法獲得結果時，抑或學童的討論太過冗長繁雜或學童間有了無法解決的爭執時。
4. 在正式教學實驗時的診斷活動設計應再加入「那...可不可以？」、「你可以說明...和...的不同嗎？」、「你還有沒有別的解法？」...等話語，讓學童能進一步的深思，達到認知衝突的目的。
5. 試教中，學童出現從來沒有見過的這些表現，可以讓研究者在診斷教學時更去注意學童可能的不同想法或解題策略。

五、教學實驗流程

- 91.10.28 11.05 二組都進行四節課 160 分鐘的教學。
91.11.06 進行分數概念後測。
91.11.11 進行學校期中評量。

六、資料處理

本研究以質、量並用的方式進行研究。在量的部份，蒐集的資料有分數概念

後測試題以及學校期中評量的分數試題的表現資料，經由 Microsoft Excel 2000 及 SPSS 10.0 版統計軟體進行統計分析，分別作「獨立樣本的 T 檢定」，以瞭解教學實驗的成效；並分別對各試題的答題表現進行兩組間的「卡方檢定」，以進一步瞭解實驗組與控制組學童在每一試題的表現是否有差異。在質的部份，蒐集的資料著重在教學活動中的教室觀察，尤其是師生的問答、學童的討論與辯證，以及學童間的互動情形。

肆、研究結果

本研究旨在探討分數概念診斷教學的成效，首先，透過實驗組學生在分數概念課堂學習的情況來說明實驗組的學習品質，再透過實驗組與控制組分數概念後測試題成績的統計檢定、學校期中評量的分數試題成績的統計檢定來檢驗診斷教學的成效。

一、實驗組學童在分數概念課堂學習的表現

本研究主要在診斷國小四年級學生的等值分數概念及單位量概念，因此，我們各以一個教學活動的片段來說明實驗組學生在上述二個分數子概念的學習情形。

(一) 在等值分數概念課堂的表現

佈題：相同的八塊餅乾，若妹妹吃掉了這些餅乾的 $\frac{1}{2}$ ，那妹妹吃掉幾塊餅乾呢？

(底下是某一組的討論，S0 為組長)

S0：大家把題目想想，……好，我們開始討論，誰要先講？

S1：是 4 塊餅乾。

S2：是嗎？題目上面又沒有 4，我覺得是 2 塊餅乾。

S3：不對，應該是 1 塊，不是 2 塊，因為分子是 1。

S2：分母是 2，所以是 2 塊。

S1：你們很奇怪耶！題目明明說妹妹吃了八塊的 $\frac{1}{2}$ ，就是四塊啊！怎麼會是 1 塊和 2 塊呢？

S2：哪有？它（指題目）只是說這些餅乾的 $\frac{1}{2}$ 而已，和八塊有什麼關係？

S3：S1，你說八塊的 $\frac{1}{2}$ 就是 4 塊，那十塊的 $\frac{1}{2}$ 是多少？

S1：5 塊！

S2：組長，你覺得呢？（這一題）是幾塊？

S0：我覺得 S1 比較對，因為 $\frac{1}{2}$ 就是一半啊，八塊的一半就是 4 塊沒錯。

S3： $\frac{1}{2}$ 是一半我知道，那不是變成半塊，怎麼會是 4 塊呢？（皺眉頭！）

S0：那是一塊的一半才是半塊，可是有八塊耶，你自己用手指數數看。

S3：是 4 塊沒錯！（張開自己的手指數著）

在上述的小組討論中，雖然 S1 一開始就說出正確答案“4 塊”，但 S2 受題目出現的數字的影響而認為“4 塊”不是正確答案，並受分數的分母的影響，而呈現迷思概念，以為答案是“2 塊”。而 S3 則受分子的影響，而以為答案是“1 塊”。S1 雖然以再次說出正確答案來反駁 S2、S3，但由於沒有說明理由，因此 S2、S3 未加以認同，當然也沒有產生認知衝突，此時 S0 以“ $\frac{1}{2}$ 就是一半”來協助說明，但 S3 因混淆單位量，而以為一半就是半塊，雖然引起他之前以為答案是“1 塊”的認知衝突，但仍然不知道為何正確答案是 4 塊，亦即 S3 已產生認知衝突，但也引出另一個迷思概念（混淆單位量），以致於概念仍然無法改變、澄清。幸好，S0 先澄清在哪一種情況下才會“一半是半塊”，並要求 S3 以手指具體操作的方式來解“8 塊的一半是多少？”。最後 S3 概念獲得澄清，自己找出正確答案“4 塊”。

（二）在單位量概念課堂的表現

佈題：一盒蛋糕有 4 條小蛋糕，小明拿了 $\frac{1}{2}$ 盒蛋糕，小華拿了 $\frac{1}{2}$ 條蛋糕，請問小明和小華拿得一樣多嗎？

（底下是全班的討論）

.....

T：S7，你說說看為什麼小明拿的比較多？

S7：因為小明拿了「盒」，小華拿了「條」，所以盒比條還要多。

T：喔！因為盒比條多，所以 $\frac{1}{2}$ 盒比 $\frac{1}{2}$ 條大。

（突然有學童舉手）

T：S8，你有什麼問題。

S8：老師，我覺得剛剛 S7 講的有點不太對。

T：那你說說看 S7 那裡講得不太對。

S8：他說「盒」比「條」還要多，我覺得不一定耶！

T：那你要不要告訴我們你的想法？

S8：如果換個數字呢？

T：你要不要舉個例子看看。

S8：比如說 $\frac{1}{2}$ 盒就沒有比 3 條多。

T：你是怎麼知道的？

S8：因為 $\frac{1}{2}$ 盒是 2 條啊！

T：對於 S8 的舉例，有沒有人還要說明的？

S9：老師，我覺得 S8 講的不對，S7 才對。

T：你可以解釋一下嗎？

S9：題目不是說一盒蛋糕有 4 條小蛋糕嗎，一盒有四條啊！盒應該比條多。

T：那你覺得 S8 的說法對嗎？

S9：不對，因為他已經把 $\frac{1}{2}$ 盒化成 2 條了，再去跟 3 條比。

S8：沒錯啊，不是單位相同才能比較誰多嗎？如果不是這樣，我們怎麼知道 $\frac{1}{2}$ 盒是幾條？

.....

S13：老師，我覺得剛剛 S8 講的沒錯耶！記得以前的老師有說過：「單位不同不能作比較」，所以我想應該是要化成一樣的單位，才能知道那個多？

S14：老師，我可以用公尺和公分來作舉例嗎？

T：當然可以！

S14：如果光用單位來說，公尺比公分大，因為 1 公尺是 100 公分；但是 $\frac{1}{2}$ 公尺不一定比 50 公分大，因為 $\frac{1}{2}$ 公尺是 50 公分。

雖然 S7 一開始即注意到 $\frac{1}{2}$ 盒與 $\frac{1}{2}$ 條的單位量不同而獲得正確答案，但其理由卻不夠正確，因此 S8 以 $\frac{1}{2}$ 盒和 3 條比來反駁 S7 只注意單位量的不適當看法，但 S9 卻認同 S7 的看法，他們都只注意單位的不同，而沒有注意單位（盒、條）需配合數字才能比較大小（ $\frac{1}{2}$ 盒 vs. $\frac{1}{2}$ 條， $\frac{1}{2}$ 盒 vs. 3 條）。幸好 S14 認同 S8 的看法，並以大家熟悉的公尺、公分當例子來說明比較大小時，除了要注意單位之外，還要注意單位前面的數字才能作正確的解題。

從上述的課堂討論中，我們可以看到教師一再提供機會要求學生說明為什麼這樣解題，要求學生提出反駁的理由，甚至建議學生舉例說明等。由於教師提供許多機會讓學生互相辯證，因此學生的概念越來越清楚，才會產生 S14 以公尺、公分作說明的情形。

二、學童在分數概念後測試題之表現

(一) 兩組學童在分數概念及各子概念之整體表現及統計檢定

實驗組與控制組學童在整份後測試題上之分數概念及各子概念的整體表現與統計檢定情形, 如表 9。

表 9 兩組學童分數概念後測試題的整體表現與統計檢定

組別 \ 概念	整體分數概念	等分概念	簡單分數概念	單位量概念	等值分數概念
實驗組	74.43 %	84.03 %	89.71 %	68.83 %	57.72 %
控制組	63.52 %	76.19 %	88.39 %	56.36 %	38.26 %
統計檢定	.016*	.140	.715	.036*	.011*

* $p < .05$, ** $p < .01$

1. 後測試題的平均答對率, 實驗組為 74.43%, 控制組為 63.52%; 檢定結果顯著值 (p 值) 為 .016, 兩組在分數概念後測試題的表現上達到顯著差異, 顯示實驗組的診斷教學成效顯著優於控制組的小組討論式教學成效。

2. 由於二組學生在等分概念及簡單分數概念上的平均答對率都達 76 % 以上, 表現都還不錯, 二組學生在這二個分數子概念上的學習表現沒有顯著差異。

3. 在單位量概念及等值分數概念上, 實驗組學生的表現都顯著優於控制組, 尤其在等值分數概念方面, 差異最大。

(二) 兩組學童在分數子概念各試題之表現情形

1. 在等分概念及簡單分數概念各試題的答題表現上, 實驗組與控制組均無顯著差異。

2. 在單位量概念各試題的答題表現上, 二組學生在第 14 題達到顯著差異。

第 14 題「具分數符號的蜂蜜蛋糕問題」:

() 有 3 條長方形蜂蜜蛋糕, 阿姨拿走全部 3 條蛋糕的 $\frac{1}{2}$, 把阿姨拿走的塗上顏色, 下面那一個塗法是對的?

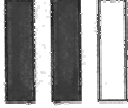
①



②



③



④



⑤其他

表 10 分數符號的蜂蜜蛋糕問題的測驗結果

類型/選項	1	2	3	4	5
實驗組選答率	0	26.47%	11.76%	61.78%	0
控制組選答率	21.21%	18.18%	24.24%	33.33%	3.03%

如表 10，實驗組與控制組的答對率分別為 61.78%、33.33%。實驗組的主要錯誤類型為選項②塗 2 條半（26.47%），這些學童認為塗 2 條代表分母的 2，塗半條代表分子的 1；其次為選項③塗 2 條（11.76%），這部分的學童在處理分數問題時受到分母的影響。控制組的主要錯誤類型為選項③塗 2 條（24.24%）；其次為選項①塗 1 條（21.21%），這些學童受到分子是 1 的影響；再其次為選項②塗 2 條半（18.18%）。

實驗組和控制組在錯誤類型的表現差異頗大。我們從實驗組學生在課堂上的表現可以發現他們在解分數問題時，原本也受分子、分母的影響，但透過討論、認知衝突、澄清概念而達到正確的解題。這種透過認知衝突的診斷活動可能是造成實驗組在本題中未受分子的影響，而且較少學生受分母的影響。

3. 在等值分數概念試題的答題表現上，實驗組與控制組在第 15 題「冰棒問題」、第 16 題「蔥油餅問題」、第 22 題「綵帶比較問題」、第 25 題「蘋果比較問題」等四題達到顯著差異，我們以第 15 題、第 16 題為例作說明：

第 15 題「冰棒問題」：

（ ）爸爸買了一些冰棒，全家吃掉這些冰棒的 $\frac{1}{2}$ ，請問全家吃掉幾枝冰棒，下面哪一個圈法是對的？

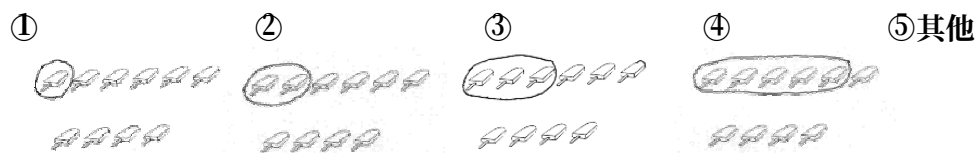


表 11 冰棒問題的測驗結果

類型/選項	1	2	3	4	5
實驗組選答率	0	14.71%	0	85.29%	0
控制組選答率	21.21%	33.33%	3.03%	39.39%	3.03%

如表 11，實驗組與控制組的答對率分別為 85.29%、39.39%。兩組共同的錯

誤類型為選項②圖 2 枝 (實驗組 14.71%、控制組 33.33%)，這些學童在處理分數問題時受到分母的影響。控制組另一種錯誤類型為選項①圖 1 枝 (21.21%)，這些學童受到分子是 1 的影響。

第 16 題「蔥油餅問題」：

() 媽媽買了 1 個蔥油餅 (如右圖)，哥哥吃掉了其中的 $\frac{1}{4}$ 。把哥哥吃掉的蔥油餅塗上顏色，下面哪一個圖的塗法是對的？

①



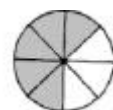
②



③



④



⑤其他



表 12 蔥油餅問題的測驗結果

類型/選項	1	2	3	4	5
實驗組選答率	20.59%	47.06%	26.47%	2.94%	2.94%
控制組選答率	39.39%	18.18%	27.27%	9.09%	6.06%

如表 12，實驗組與控制組的答對率分別為 47.06%、18.18%。兩組共同的錯誤類型為選項①塗 1 塊 (實驗組 20.59%、控制組 39.39%)，這部分學童受到分子是 1 的控制，而未將 8 塊蔥油餅視為全部，因而塗 1 塊；其次是選項③塗 4 塊 (實驗組 26.47%、控制組 27.27%)，這些學童受到分母的控制。

此二試題同屬等值分數概念試題，從實驗組學童在此二試題的答題表現發現，在第 15 題「冰棒問題」的答對率為 85.29%，但第 16 題「蔥油餅問題」的答對率卻降至 47.06%，受分子分母的影響的學童也從第 15 題的 14.71% 增加到第 16 題的 47.06%。這似乎顯示「一半」的概念有助於學童處理「 $\frac{1}{2}$ 」的單位分數等值問題；而在處理「非 $\frac{1}{2}$ 」的單位分數等值分數問題時 (如 $\frac{1}{4}$)，並無相對的生活語言可以銜接，必須以分數符號來解題。從相關的分數研究發現，很多的學童在處理等值分數問題時確實會受到分子與分母的影響來進行解題，雖然實驗組學童經過診斷教學的活動，但在非 $\frac{1}{2}$ 的等值分數問題依然會受分子分母的影響來解題。

三、學童在學校期中評量的分數試題之表現

(一) 兩組學童在分數概念及各子概念之整體表現及統計檢定

實驗組與控制組學童在期中評量的分數試題上之表現與統計檢定情形，如表

13。

表 13 兩組學童在期中評量的分數試題的表現與統計檢定

組別 \ 概念	整體分數 概念	分數辨識 概念	單位轉換 概念	簡單分數 概念	等值分數 概念
實驗組	88.80 %	96.47 %	91.22 %	91.20 %	78.24 %
控制組	81.44 %	96.36 %	86.87 %	87.88 %	59.40 %
統計檢定	.036*	.959	.392	.541	.007**

* $p < .05$, ** $p < .01$

根據表 13 發現：

1. 學校期中評量的分數試題的平均答對率，實驗組為 88.80 %，控制組為 81.44 %；檢定結果顯著值（ p 值）為 .036，兩組在期中評量的分數試題的答題表現達到顯著差異，亦即實驗組的診斷教學成效優於控制組的小組討論式教學成效。

2. 由於二組學生在「分數辨識概念」、「單位轉換概念」、「簡單分數概念」的平均答對率都達 87% 以上，表現都很好，二組學生在期中評量的這三個分數子概念上的學習表現沒有顯著差異。

3. 在較難學習的等值分數概念方面，實驗組學生的表現顯著優於控制組。

（二）兩組學童在分數子概念各試題之表現及統計檢定

1. 在分數辨識、單位轉換及簡單分數概念各試題的答題表現上，實驗組與控制組均無顯著差異。

2. 在等值分數概念各試題的答題表現上，實驗組與控制組在第 7 題「整數化成分數問題」、第 10 題「假分數化成帶分數問題」兩題上達到顯著差異：

第 7 格：整數化成分數問題：把整數寫成分數 $7 = \frac{(\quad)}{2}$

表 14 整數化為分數問題的填答情形

填答的答案	1	3	7	14
實驗組填答率	0	0	5.88 %	94.12 %
控制組填答率	6.06 %	12.12 %	12.12 %	69.70 %

如表 14，實驗組與控制組的答對率分別為 94.12 %、69.70 %。兩組共同的錯

誤類型為 $(7, 7=7/2)$ (實驗組 5.88%、控制組 12.12%)，這部分學童認為整數與分數的差別只是多了一個分母，而分子應該都相同，顯示分數的概念還未建立。控制組另外的錯誤類型為 $(3, 7=3/2)$ (12.12%)，以及 $(1, 7=1/2)$ ，這兩類學童在解整數化為分數的問題時，可能將整數除以分數的分母，以所得的商數或餘數來作答，亦即使用 $(7 \div 2 = 3 \dots 1)$ 的 3 和 1 來作答。

第 10 格：假分數化成帶分數問題：把假分數寫成帶分數 $21/8 = (\quad)$

表 15 假分數化為帶分數問題的填答情形

填答的答案	$5\frac{2}{8}$	$2\frac{1}{8}$	$2\frac{5}{8}$	其他
實驗組填答率	0	0	91.18%	8.82%
控制組填答率	9.09%	12.12%	63.64%	15.15%

如表 15，實驗組與控制組的答對率分別為 91.18%、63.64%。控制組的主要錯誤類型為 $(2\frac{1}{8})$ (12.12%)，這部分學童在解假分數化為帶分數的問題時，可能將假分數中的分子數字拆開，分別填入帶分數的整數與分子；其次是 $(5\frac{2}{8})$ (9.09%)，這些學童則可能是在假分數的分子與分母相除後，將商數與餘數的位置放置相反。

伍、結論與建議

一、研究結論

在相同教學時數、相同任教教師之下，從實驗組學童在分數概念課堂表現及二組學生在分數概念後測試題之表現、學校期中評量的分數試題之表現的研究結果來看，診斷教學的教學成效優於小組討論式教學的成效。

(一) 實驗組學童分數概念學習之課堂表現

1. 控制組的教學活動中，教師常根據教師手冊的建議以「說說看，你是怎麼知道的？」、「你是怎麼算出來的呢？」、「你是怎麼做的？」、「可不可以說說你的

想法？」...等問話，讓學童一步一步地呈現自己原有的想法或是迷思概念。但實驗組的診斷教學活動中，教師除了使用與控制組相同的問話外，在學童說明自己的想法與解題策略後，常常繼續以「你認為這樣對嗎？」、「那...可不可以？」、「你可以說明...和...的不同嗎？」、「你還有沒有別的解法？」、「那如果...呢？」等話語追問，除了讓學童能夠呈現迷思概念之外，也讓學童進一步的思考。

2. 實驗組學童在討論辯證活動中聽到正反意見的想法，或自己的想法意見被反駁批判時，在教師「診斷式」話語的提問下，會花較長的時間思考；當認知衝突產生時，更會激盪這些學童的思考活動，較易達到概念的澄清。

3. 當學生要反駁別人的意見時，常會舉類似但較簡易的問題來說明，讓被反駁的學生更容易發現自己的錯誤概念。

（二）二組學童分數概念後測試題之表現

1. 實驗組在整體分數概念及單位量概念、等值分數概念的表現上顯著優於控制組。四年級學童初次學習等值分數概念，且雖然在處理分數問題時會使用到單位量，但教材並未針對單位量概念設計教學活動。因此，在實驗組的教學中加強等值分數概念的診斷教學並加入單位量概念的診斷教學活動，對概念的學習是有幫助的，並且也確實達到學習的效果。

2. 實驗組與控制組在等分概念及簡單分數概念的表現上沒有顯著差異。二組學童在此二分數子概念的平均答對率都不錯，表示四年級學童在經過分數概念的兩年學習，此二子概念的學習已經不錯。因此，是否對四年級學童實施此二分數子概念的診斷教學，就較難看出教學成效的差異。

3. 實驗組學童經過診斷教學活動，在「 $\frac{1}{2}$ 」或「一半」的單位分數等值試題的答題表現良好，在「非 $\frac{1}{2}$ 」的單位分數等值試題表現上則較為不佳，顯示一半的概念有助於學童處理「 $\frac{1}{2}$ 」的等值分數問題；但在「非 $\frac{1}{2}$ 」的等值分數問題的解題時，則必須面對分數符號的運算，較易受分子與分母的影響。不過，即使如此，實驗組學生的表現仍然優於控制組。

（三）二組學童在學校期中評量的分數試題之表現

1. 實驗組在整體分數概念及等值分數概念的表現上，顯著優於控制組。四年級學童第一次學等值分數概念，研究結果顯示診斷教學對概念的學習是有幫助的，並且也確實達到學習的效果。

2. 實驗組與控制組在分數辨識、單位轉換及簡單分數概念的表現上沒有顯著差異。二組學童在此三分數子概念的平均答對率都很高，表示學童對此三子概念的學習已經不錯，有無診斷教學的實施，都能有良好的答題表現。

二、建議

(一) 診斷教學活動設計

1. 實驗組的診斷教學活動亦可考量參照控制組的教學內容來改編設計, 成為另一種教學實驗的設計方式。本研究實驗組之診斷教學活動設計, 係針對中年級學生在分數概念中有較大學習困難的子概念來設計的; 控制組則依照教學指引的活動內容來教學, 兩組的教學內容不盡相同。若實驗組的診斷教學活動能夠參照控制組的教學內容來改編設計, 並引進診斷教學原則與運用能引起學童認知衝突的教師問話技巧, 則又是另一種教學實驗的設計方式, 但其教學成效如何, 則有待未來的研究者作進一步的研究。

2. 診斷教學活動的時間可再加長: 實驗組的教學活動中, 涵蓋了教科書的分數單元教材, 以及研究者欲診斷的教學活動, 但受限於課程所規定的時數及一節課的時間, 難免會有時間不足而造成無法完成所有教學活動的情形發生。然而, 診斷教學注重的是認知衝突的產生及認知衝突產生後的平衡過程, 必須要有足夠的時間才能達成; 若時間不足, 縱使學童已有認知衝突, 亦不能達到良好的概念澄清與認知平衡效果。若能加長診斷教學活動的時間, 讓學童在產生認知衝突後, 還能夠有充足的時間來討論辯證, 相信對學童的概念澄清與認知平衡能得到更好的成效。

(二) 對教材之建議

1. 應加入能引起學童「認知衝突」的診斷教學活動。

現行數學教科書的教學活動設計, 強調學童的討論活動, 但缺乏對學童的迷思概念提供良好的澄清糾正的教學活動。本研究結果證實, 診斷教學中引起學童「認知衝突」的活動, 的確能提供學童自行澄清與糾正的機會。因此, 建議教學指引中除現行的討論活動之外, 再適時引進診斷的教學活動, 以提升學童數學概念學習的成效。

2. 可增加單位量概念的分數相關教材。

全國中年級學童在單位量概念的表現並不好; 本研究診斷教學後的表現, 學童在此概念的表現(平均答對率 69%) 比控制組(56%) 好, 也比全國施測的結果(54%) 要好(黃靖瑩, 2003), 顯示單位量概念其實是可以學習的。目前分數教材中並沒有針對單位量概念設計教學活動, 因此建議增加單位量概念的分數相關教材。

3. 等值分數概念的教材安排應由「 $\frac{1}{2}$ 」的單位分數至「非 $\frac{1}{2}$ 」的單位分數。

由實驗組在分數概念後測試題的答題表現發現，實驗組學童雖然經過診斷教學的活動過程，但在使用分數符號的「非 $\frac{1}{2}$ 」的單位分數等值試題上的表現還是很差，顯示學童在「非 $\frac{1}{2}$ 」的單位分數等值概念的學習上，確實存在著較難破除的迷思概念。一般教材的安排大都由簡而難，因此建議等值分數概念的教材安排，應先進行「 $\frac{1}{2}$ 」的單位分數的學習，再進入「非 $\frac{1}{2}$ 」的單位分數的學習。

（三）教師在教學上的問話應做適當的調整

本研究的診斷教學活動過程中發現，教師的適當問話確實能引起學童的思考探究。因此，建議教師在教學中的問話能做適度的調整，加入能促進學童深入思考或引起學童認知衝突的話語，如「你可以說明…和…的不同嗎？」，以幫助學童澄清概念。

（四）師資培育應加入診斷教學的課程

本研究結果驗證診斷教學對學童概念的學習確實是有效的，但是在我們師資培育階段的課程中缺乏診斷教學的相關課程。因此，建議師資培育的課程中應該加入有關診斷教學的課程設計，讓未來的老師們都能學習診斷教學的概念與診斷教學的技巧，以利將來能將診斷教學的方法融入教學中，讓學童的數學學習更有助益。

（五）未來研究的方向

未來可對等值分數概念進行更深入的教學研究。由研究結果得知，實驗組學童在經過診斷教學後，雖然在分數概念後測以及學校期中評量的分數試題的等值分數概念試題上的表現比控制組好，也達到顯著差異，但還是不理想。究其原因，是本研究的診斷教學活動設計還不夠理想，以致無法破除學童的迷思概念？還是四年級學童的認知成熟度不夠，等值分數概念還不適合在四年級學習？這還有待進一步的研究，尤其是受分母影響的迷思概念。

參考文獻

- 江南青 (1986)。比例概念的診斷與補救。國立師範大學數理教育研究所碩士論文, 未出版。
- 呂玉琴 (1991)。分數概念：文獻探討。國立臺北師範學院學報, 4, 573-606。
- 李源順 (1996)。國小幾何的動態診斷教學實驗研究。國立僑生大學先修班學報, 4, 345-375。
- 李源順 (2001)。0.9999...的診斷教學實驗。科學教育研究與發展, 25, 31-45。
- 林清山 (1989)。實驗研究法在教育研究上的應用及限制。科學教育研究方法第一次研習會第三講。
- 林福來 (1992)。教與學的整合研究(II)：分數啟蒙的診斷教學。行政院國科會專題研究計畫成果報告, 未發表。
- 林福來、郭汾派、林光賢 (1985)。比例推理的迷思概念診斷與補救。科教研討會論文彙編 (頁 115-138)。師大化學系。
- 林福來、黃敏晃、呂玉琴 (1996)。分數啟蒙的學習與教學之發展性研究。科學教育學刊, 4 (2), 161-196。
- 陳雪華 (2002)。探討國小四年級學童直觀面積概念在動態診斷教學下之成效。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文, 未出版。
- 黃靖瑩 (2003)。國小中年級學童分數概念之研究。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文, 未出版。
- 游政雄 (2002)。台灣北部地區國小中年級學童分數概念之研究。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文, 未出版。
- 楊壬孝 (1989)。國中小學生分數概念的發展。行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告, 未發表。
- 詹婉華 (2003)。國小高年級學童分數概念之研究。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文, 未出版。
- Bell, A. W. (1992). Diagnostic teaching selected lectures. *The 7th International Congress on Mathematical Education* (pp.19-34). Quebec.
- Bell, A. W. (1993). Some experiments in diagnostic teaching. *Education Studies in Mathematics*, 24, 115-137.
- Bergeron, J. C., & Herscovics, H. (1987). Unit fraction of a continuous whole. *The 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Montreal, Canada.
- Columba, H. L. (1989). *Equivalent fraction concepts: A teaching experiment*. Unpublished doctoral dissertation of University of Louisville, Graduate School of Education.
- Figueras, O., Filloy, E., & Voldemoros, M. (1987). Some difficulties which obscure the appropriation of the fraction concept. *Proceedings of the 11th Conference of International*

- Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.366-374). Montreal, Canada.
- Figueras, O. (1989). Two different view of fraction: Fractionating and operating. *Proceedings of the 13th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Paris, France.
- Francisco, B., Sandra, M., & Alina, S. (2002). How to promote children's understanding of fractions? An exploratory study. *Proceedings of the 26th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2 (pp.89-96). Norwich, UK.
- Hewson, M. G., & Hewson, P. W. (1983). Effect of instruction using students' prior knowledge and conceptual change strategies on science learning. *Journal of Research in Science Teaching*, 20(8), 731-743.
- Hunting, R. P. (1983). Alan: A case study of knowledge of units and performance with fraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(3), 182-197
- Kerslake, D. (1987). *Fraction: Children's strategies and errors*. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project. NFER-NeLson. London.
- Niaz, M. (1998). A lakatosian conceptual change teaching strategy based on student ability to build models with varying degrees of conceptual understanding of chemical equilibrium. *Science and Mathematics*, 7(2), 107-27.
- Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, L. (1970). *The child's conception of geometry* (E. A. Lunzer, Trans.). London: Routledge and Kegan Paul. (Original work published 1960)
- Slavin, R. E. (1984). Team assisted individualization: Cooperative learning and individualized instruction in the mainstreamed classroom. *Remedial and Special Education (RASE)*, 6, 33-42.
- Tirosh, D., & Stavy, R. (1996). Intuitive rules in mathematics and science: The case of "The more of A, the more of B". *International Journal of Science Education*, 18(6), 653~667.
- Tirosh, D., & Stavy, R. (1999). The intuitive rules theory and inservice teacher education. *Proceedings of the 1999 International Conference on Mathematics Teacher Education* (pp.205-225). Taiwan.

Study of the Diagnostic Teaching on Fraction for Fourth-Grader Students of Elementary School

Ming-hung Chen & Yuh-chyn Leu*

ABSTRACT

The purpose of this research is to examine the effectiveness of the diagnostic teaching on fraction. The research method is an experiment approach and the lessons of fraction were taught to the fourth grade students of elementary school. The experimental group consisted of 33 students and was instructed by diagnostic teaching and the control group had 34 students and was taught with small discussion groups. The result of the diagnostic teaching is analyzed through comparisons and contrasts between these two groups from three sources: (a)the learning phenomenon in class; (b)performances on a fraction test after instructions were completed; and (c)scores of fraction questions on the school's midterm.

The result of this research reveals that the diagnostic teaching can create cognitive conflicts on students. Through this process, students' concept can be clarified and corrected, and students' misconception on fraction can be dispelled effectively. The main research results are reported as follows:

1. Learning phenomenon in class: The diagnostic teaching is beneficial for learning.

2. Performances on the fraction test: The rates of correct answers are generally higher for students with diagnostic teaching than the control group.

(a)The students who received diagnostic teaching performed better in the following concepts: the whole fraction concept, unit concept, and equivalent fraction concept.

(b)These two groups of students have no significant differences in their

* Ming-hung Chen: Teacher, Nan-men Elementary School, Taoyuan County

Yuh-chyn Leu: Professor, Department of Mathematics and Information Education, National Taipei University of Education

performances on the equal-sharing concept and simple fraction concept.

3. Midterm: The rates of correct answers are generally higher for students with diagnostic teaching than the control group.

(a) The students with diagnostic teaching performed better in the following concepts: the whole fraction concept and equivalent fraction concept.

(b) These two groups of students have no significant differences in their performances on the fraction assortment recognition, unit commutation and simple fraction concept.

Meanwhile, according to the research results, this study proposes some suggestions for designing activities of diagnostic teaching, textbooks, instructions, teacher development, and the future research directions.

Key words: diagnostic teaching, cognitive conflict, misconception, equal-sharing, simple fraction, units, equivalent

