

國小數學資優生運用畫圖策略 解題之探究

林 香、張英傑*

摘 要

本研究旨在探討國小數學資優生運用畫圖策略解題但有不同解題表現者的解題過程差異；研究對象是由參加 2003 年亞太區小學數學奧林匹亞競賽台灣區初賽錄取學生中選取運用畫圖策略解題次數最多但不同解題正確率的 4 名學生進行半結構性晤談，研究發現如下：4 個個案的解題過程差異可分為四個方面來說：（一）圖畫表徵的內容差異（二）圖畫表徵的形成差異（三）圖畫表徵的運用差異（四）評估解答的差異。

關鍵詞：國小、數學資優生、數學解題、畫圖策略

* 林 香：台北縣秀山國小教師

張英傑：國立臺北師範學院數學暨資訊教育學系副教授

投稿收件日：93 年 3 月 31 日；修正日：93 年 6 月 8 日；接受日：93 年 7 月 2 日

國小數學資優生運用畫圖策略 解題之探究

林 香、張英傑*

壹、研究動機與目的

九十學年度開始實施的「國民中小學九年一貫課程綱要」中，特別強調要培養學生『能帶著走的能力』，而非背不動的書包，並列舉了十大基本能力指標，其中「獨立思考與解決問題」正是學生必需具備的能力之一（教育部，民89）。

在數學教育中，解決問題也是一個重要的課題。從美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics, NCTM）歷年來所公佈的課程標準，把「問題解決」列為重點之一（NCTM, 1989, 2000），即可顯示問題解決在數學學習及數學課程中的重要性。

近年來，國內數學教育改革也以數學解題為方向，八十二年版國小數學課程標準之總目標指出：「國民小學數學教育目標，在於輔導學生從日常生活經驗中，獲得有關數學知識，進而培養有效運用數學方法，以解決實際問題的態度及能力。」（教育部，民82，頁91）數學新課程的重點之一是將數學視為解題（周筱亭，民83）；目前九年一貫數學領域目標亦強調發展學生解決數學問題的能力，期望學生達成「發展形成數學問題與解決數學問題的能力」，並透過數學學習激勵多樣性的獨立思維方式，激盪各種想法，激發創造力（教育部，民90）。迎接知識經濟時代的來臨，教育部於民國91年公佈創造力教育白皮書，培養學生思考創新的能力，以打造創造力國度（教育部，民91），而創新思考其實正是數學解題所強調的精神。

* 林 香：台北縣秀山國小教師
張英傑：國立臺北師範學院數學暨資訊教育學系副教授

台灣地區因物質資源有限，人力資源的開發益形重要，為促進國家各項建設，需透過教育過程，挑選各種才智優異的學生，給予充足的學習方案，培養其成為對國家建設有貢獻之人才（吳武典，民 88）。是故教師應發掘與啟發國小數學資優生的數學解題潛能，將來貢獻於社會國家。然誠如謝淡宜（民 88）的研究指出，要發展及提升數學資優生的解題能力，應先瞭解其解題特質及解題思維。但研究者閱讀相關文獻時發現，國內有關國小學童數學解題的研究顯然很多（王正信，民 91；林碧珍，民 78；邱佳寧，民 90；涂金堂，民 84；陳明媚，民 91；楊明家，民 86；楊瑞智，民 83；謝淡宜，民 88；鍾政廷，民 91），不過甚少對具有數學潛能之學生進行探究，因此研究者以國小數學資優生為對象進行解題研究。

數學解題是一個複雜的心智活動，一般人面對問題時，會運用各種辦法以達到目標或求得解答；而且同一個問題，每一個人所採用的策略不一定相同，甚至一個人處理不同類型的問題可能使用的方法也不同，因此策略的運用可說是人類高層次思維運作的表現，也是解題成功的關鍵因素之一。解題策略的種類非常多，其中『圖畫表徵策略』是許多學者及解題教學研究較常提到的有效解題策略之一（吳昭容，民 79；林淑菁，民 92；徐文鈺，民 81；楊淑芳，民 90；魏君芝，民 92），但運用圖畫表徵策略並不一定保證成功解題（楊瑞智，民 83；Campbell, Collis & Watson, 1995; Lowrie & Kay, 2001）。也就是有的人畫圖成功解題，有的人畫圖仍失敗；研究者認為有必要瞭解為什麼同樣運用畫圖策略，為什麼有不同的解題成效，他們之間的差異值得深入探究。

綜合上述動機，本研究旨在探討國小數學資優生運用畫圖策略解題但有不同解題正確率者的解題過程差異。希望藉由此研究，進一步了解國小數學資優生的解題思維及策略運用的想法，也期望研究結果能提供相關教育人員參考，以增進教學效能，提升學生的解題能力，或者作為未來的研究參考。

貳、文獻探討

本研究旨在瞭解影響國小數學資優生運用畫圖策略解題但不同解題正確率者的解題過程差異。故對畫圖策略與數學解題的關係，及視覺思考、問題表徵等相關的研究文獻也進行探討，以作為本研究架構之參考。

一、畫圖策略與數學解題

許多解題教學研究者（吳昭容，民79；林淑菁，民92；徐文鈺，民81；楊淑芳，民90；魏君芝，民92）指出有些數學問題抽象度較高，畫出圖形常有助於問題的解決，透過畫圖的方式使問題具體化、直觀化，進而找出解題的途徑，因此解題教學時透過圖示說明，也建議學生運用畫圖方法於個人解題活動中。所以畫圖策略是指解題者在解題過程中，運用畫圖的方式，畫出與題意相關的圖形或圖案，藉以幫助解題者觀察、推理、思考，是達到解答問題的一種手段。畫圖策略亦可稱為圖畫表徵策略、圖示策略與圖解等。

由認知發展的觀點來看或由訊息處理的角度切入，圖像（圖示）在數學的學習有很大助益，因此應用畫圖的方法於問題解決的活動中，透過圖畫表徵問題較為抽象或較為複雜的成分，使解題者易於發現解題的關鍵，故畫圖策略可說在數學解題過程中扮演著一個重要角色，它是有助解題的有效策略，所以建議學生解題時可利用圖畫表徵策略。

二、畫圖策略之相關研究

（一）解題之視覺方法探討

許多研究（紀惠英，民80；Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Krutetskii, 1976/1993; Lowrie, 2000; Lowrie & Clements, 2001; Lowrie & Kay, 2001）證實學生解決數學問題會產生偏愛使用視覺或非視覺（語言）的方法，他們認為至少在處理問題的最初階段，解題者思考可能的解決方法時，他們偏愛使用視覺模式或偏愛非視覺的思維來解題。

所謂視覺方法，是指個體解決數學問題時，會在腦海中或在紙上呈現與問題有關的圖像，以幫助個體進行解題思考。而解題者選擇使用視覺方法與個人的特質有關，那與性別的關係如何？

Lowrie and Kay（2001）探究 112 個六年級學生（61 男生和 51 個女生）解題使用的方法（視覺和非視覺）有無差異，結果發現性別對視覺或非視覺方法的偏愛沒有關聯，除外，Lowrie and Kay 也進一步調查作業的複雜度減少時，學生解數學問題所使用的方法是否改變，結果發現有些學生有視覺或非視覺方法的偏愛外，問題的困難度也影響學生選擇表徵問題的方法；學生對於困難及新穎的問題，較可能用視覺方法，相較之下，非視覺方法則使用在較少困難的情況。

Lowrie and Clements（2001）的研究是讓三個不同解題類型（視覺型、非視

覺型、調和型)的六年級學生一起討論數學問題、解決問題，然後在學年期間的不同階段，讓三個人個別解 4 個數學文字題，作者們觀察、分析三人解題之視覺歷程，結果發現在研究期間，當數學問題減少新穎因素時，也就是屬於較熟悉的問題，或類似的問題，三個個案學生的解題行為轉變為較非視覺/語言推理。亦即一旦學生覺得他們擁有適當的基模和概念知識去連結先前經驗和所理解的解題策略，他們表現出想要以非視覺的方法解題，尤其屬於視覺型的個案，她在學年開始偏愛使用視覺方法解題，在學年末解題方法有明顯轉變。

綜合 Lowrie and Clements (2001) 與 Lowrie and Kay (2001) 的研究可知問題性質易影響視覺方法的選擇，也就是不管學生對於視覺方法是否有特殊偏愛，當問題屬於較熟悉的或類似的問題，學生傾向於使用非視覺方法解題；反之，當問題是較困難、新穎的問題，學生則傾向使用視覺方法。

(二) 解題之問題表徵探討

一些學者從訊息處理論的觀點提出問題解決的步驟是 1.表徵問題 2.計畫解題 3.執行計畫 4.獲得解答 5.評估解答 (Hayes, 1989, 引自羅素貞, 民 85)。從這過程來看，問題表徵的形成是問題解決的第一步，它對解題計畫的形成與執行有很大的影響。亦即問題表徵是問題解決中的重要成分，外在表徵更是解題的重要輔助；如果解題者對問題所形成表徵的不正確，將會影響他找到正確解題的路徑與方法，故問題表徵對解題成敗有關鍵性的影響。

表徵的型式是多樣的，圖畫是其中的一種，運用畫圖策略解題，是指解題者問題解決時，運用了「圖畫」表徵問題及解決問題。紀惠英 (民 80) 的研究顯示解題者對表徵的型式有個人偏好的情形存在；陳其英 (民 88) 的研究發現，影響學生解題表徵型式選擇的主要影響因素是個人特質、解題經驗、以及題目性質。故探究數學資優生運用畫圖策略解題時，須重視這三個因素，由於學生的解題特質與解題經驗非研究者所能控制，因此以問題性質為變項，來瞭解學生策略運用的情形。

解題者會依解題需要選擇表徵的型式，但如何形成問題表徵？Mayer (1987/1990) 綜合認知心理學及訊息處理的觀點，提出問題表徵應包含兩個步驟：問題轉譯與問題整合。

1.問題轉譯 (problem translation)：指將問題的每一個句子或主要的詞句轉變為內在心理表徵，也就是解題者對問題的理解及對問題所牽涉的數學事實進行運作轉譯成某種表徵。

2. 問題整合 (problem integration)：指將問題中的訊息放在一起，使連貫成

一致的表徵。一個問題的正確表徵不只是一個句子一個句子的轉譯而已，還需要將幾個陳述句關聯在一起成為有用的條件。

Mayer 在書中談到對學生而言，問題轉譯歷程是不容易的，尤其是有關係語句的問題（表示數量之間數量關係的陳述句）；有些學生在轉譯過程中忽略關係句，而產生轉譯錯誤；有些人把問題的每個陳述句分開轉譯，不知如何將兩個陳述句之間關聯在一起，因此他強調問題轉譯之後，更重要的要將陳述句整合連貫成一致的表徵。

林香（民 92）研究發現運用畫圖策略解題的數學資優生錯誤情形較多的是圖畫表徵錯誤；而有些研究（何縉琪和林清山，民 83；Goldin, 1987, 引自楊瑞智，民 83；Hegarty, Mayer, & Monk, 1995）也發現解題者在問題轉譯或表徵階段，除了忽略關係語句外，還有轉譯的方法亦是造成問題表徵錯誤的原因。他們指出學生在解數學問題時，經常直接設法轉譯問題敘述，到算術式或代數式，常用「關鍵字」直接促成轉譯，例如看到「共有」就用加法、「還剩」就用減法，忽略了問題的深層結構，造成解題失敗，也就是只有轉譯問題陳述，而沒有整合有關解題的條件資訊。

綜合上述文獻，研究者認為探討國小數學資優生運用運用畫圖策略卻有不同解題成效，須探究學生的解題過程，才得以瞭解其間的差異。而解題過程以訊息處理理論的觀點較適合作為本研究觀察學生解題行為之依據，其解題步驟有 1.表徵問題 2.計畫解題 3.執行計畫 4.獲得解答 5.評估解答（Hayes, 1989, 引自羅素貞，民 85），但本研究受限於時間、人力、物力等因素，故將解題過程統整為三個階段，1.表徵問題階段（步驟 1）2.解決問題階段（步驟 2、3、4）3. 評估解答（步驟 5）。

參、研究方法與過程

一、研究方法

本研究主要探究國小數學資優生運用畫圖策略解題者但有不同解題成效者的解題過程差異。故研究者分析各種評量法後，決定採用兩種方式進行，（一）筆試－紙筆測驗，以篩選運用畫圖策略解題次數最多的學生作為晤談對象；（二）晤談－半結構性訪談，瞭解學生圖畫表徵及解決問題等過程。個別晤談進行的方

式是先讓受試解2題數學問題，完成解題後，請受試描述他的解題過程，及回答研究者的問題。個別晤談時間約50~70分鐘。晤談過程，研究者以錄音、錄影的方式蒐集資料，之後再轉譯成文字紀錄。

二、研究對象

數學資優生一般是指在數學方面具有高度潛能之學生，但國內小學階段資賦優異學生大都屬於一般智能優異的資優生，而非數學資優生。本研究所指的數學資優生是界定為參加亞太區小學數學奧林匹亞競賽台灣區初賽錄取的國小五、六年級的學生。因為此競賽試題難度頗高，且其內容與範圍都超出現行部頒之國小數學課程教材，初賽錄取的學生是所有參賽者中測驗成績排名前 20%者，顯現其具有某些數學潛能。

本研究樣本取自於參加 2003 年亞太地區小學數學奧林匹亞競賽台灣區初賽錄取學生；今年參加初賽的人數有 565 人，錄取初賽成績排行前 20%之學生，計一百二十名。本研究對象是由初賽錄取學生進行筆試，以選取運用畫圖策略次數最多且解題正確率最高與最低各 2 人，合計四名，進行個別晤談。

三、研究工具

本研究工具的設計方向，以可用畫圖方式解題的數學應用問題為主，例如題目中的數量關係較為複雜，已知條件較為隱密，很難找到解題方法，如果畫線段或畫其他圖形的方法，把題目中的數量關係，具體形象地表現出來，則可能找到解題的途徑，當然這些問題也可運用其他策略解題。研究者參考相關解題研究（Campbell, Collis, & Watson, 1995; Hegarty & Kozhevnikov, 1999; Lowrie & Clements, 2001; Lowrie & Kay, 2001），與 Krutetskii（1976/1993）中小學生數學能力心理學及其他數學問題叢書，共編製 20 題數學試題，試題設計完成後，與資優班老師討論修正。

在正式進行研究之前，研究者以服務學校鄰近有資優班之學校－台北縣健康、快樂國小及台北市希望國小五、六年級資優班學生（校名均為匿名），共 105 人進行預試。預試後，以古典測驗理論，總分取高、低分組 27%，進行各試題難易度分析，及畫圖策略的認定，其原則是只要學生在其答案紙上有任何圖畫（數線圖、數圖、集合圖、.....）或圖表，不管學生在解題過程中是否劃掉取消，均將其歸類為運用了畫圖策略。根據試題的難易度（0.66 以下）、鑑別度（0.52 以上）及畫圖人數較多者為原則，從 20 道問題中挑選 5 題作為篩選研究對象的試

題，另選 2 題作為晤談試題。

在效度方面，本測驗之效度採用專家效度。研究初期，蒐集相關文獻編製初步試題，請益國小資優班教師修正後，對國小五、六年級一般資優生 105 位進行預試，預試後，根據預試分析，再與數學教育專家及培訓教師群共同挑選修訂。另外以亞太地區小學數學奧林匹亞競賽台灣區初賽、決賽成績為效標，筆試成績與初賽成績、筆試成績與決賽成績之相關係數分別為 0.408 及 0.444 ($p < .01$)，達顯著相關。

在信度方面，本測驗採評分者信度，即筆試施測完成後由研究者與另一位同校教師進行評分，評分前研究者與另一位評分者共同討論評分內容與評分原則，然後兩人個別評分，且將分數寫於研究者設計的表格上而不寫於學生的作答紙上，完成評分後，研究者以 SPSS 統計軟體進行兩位評分的分數作相關分析，統計結果相關係數達 0.993，顯示兩人的評分有一致性高。

研究者針對筆試時運用圖畫表徵策略次數最多之高、低解題正確率的受試 4 人 (S34、S59、S23、S83)，進行一對一個別晤談，觀察瞭解他們運用畫圖策略解題的過程。個別晤談主要以半結構性的方式進行訪談，訪談大綱與數學教育專家及培訓教師群共同討論修訂。訪談大綱如下：

1. 請告訴我你的做法。
2. 你是怎麼畫出這個圖的？
3. 請說明這個圖跟解題有什麼關係。
4. 你算完會檢查嗎？

訪談大綱之效度亦採用專家效度。研究者根據文獻分析與研究目的設計晤談大綱，接著與培訓教師群及數學教育專家共同討論修訂。

肆、研究結果與討論

本研究主要探究國小數學資優生運用畫圖策略解題但有不同解題成效者的解題過程差異，因受於篇幅限制，故本文主要針對晤談時所蒐集的資料進行分析討論，而筆試資料分析於另外文章討論之。

本研究先進行筆試（試題有 5 題）以選取晤談對象，紙筆測驗結果發現有的學生解題時，每一題都運用了畫圖策略，共計有 14 人，分析運用畫圖策略次數最多的 14 人之答對題數，結果發現其解題表現差異很大（見表 1），有的人解題

正確 5 題，有的人卻只答對 1 題，故研究者選取答對題數最多的 S34、S59 和答對題數最少的 S23、S83，計有 4 人，進行一對一的半結構性晤談，以瞭解學生運用畫圖解題的過程。

表 1 運用畫圖策略最多次數者之答對題數統計

答對題數	學 生 編 號	合計
5	S34、S59	2 人
4	S29、S30、S56	3 人
3	S22、S52、S55、S67	4 人
2	S33、S60、S88	3 人
1	S23、S83	2 人

為方便敘述與討論，將晤談的 4 個個案分別化名為繪智高（S34）、繪智強（S59）兩人是筆試時運用畫圖策略次數最多之高解題正確率學生；繪智平（S23）、繪智梅（S83）是筆試時運用畫圖策略次數最多之低解題正確率學生。

以下針對四個個案解決 2 個數學問題的過程進行分析討論，包括學生圖畫表徵的內容，與利用圖畫表徵解題的過程，以下逐題討論之。

一、第一題繩子問題

題目：有一捆繩子，第一次用去全長的一半多 3 公尺，第 2 次用去第一次剩下的一半少 10 公尺，第三次用去 15 公尺，最後還剩 7 公尺，請問這捆繩子有多長？（答：54 公尺）

繪智高（S34）、繪智強（S59）、繪智平（S23）、繪智梅（S83）四人，看完題目後下筆就先畫圖表徵問題（見圖 1），4 個個案的解題策略與筆試相似。不過四人的解題表現不同，繪智高（S34）、繪智強（S59）解題成功，而繪智平（S23）、繪智梅（S83）解題失敗。

4 個個案表示透過畫圖可以較清楚題目的意思，並且可以掌握解題重要的關鍵部分。繪智強（S59）更清楚地說透過圖可觀察到「像第二次用去繩子的部分，一邊少 10 公尺另一邊多 10 公尺，一般人會因一半減 10 公尺而用加 10 公尺，其實應該減 10 公尺。」觀察他們四人的圖畫表徵，除了繪智梅是以一條線段表徵問題外，其餘三人都是將三次用去情形分開逐段表徵。

解題失敗的繪智平 (S23) 解釋其做法：「第 3 次用去 15 公尺加上剩下 7 公尺是 22 公尺，這是第二次（遲疑了 2 秒），對，是第二次的，22 是第二次的一半，所以求第二次的全長要乘以 2，然後一半又多 3 公尺，所以要把 3 公尺剪掉，就是 41，然後再乘以 2，也就是跟剛一樣的一半，就得 82。」這個題目繪智平解題錯誤。

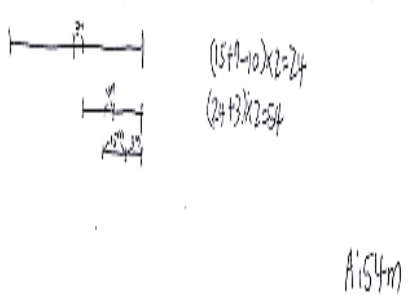
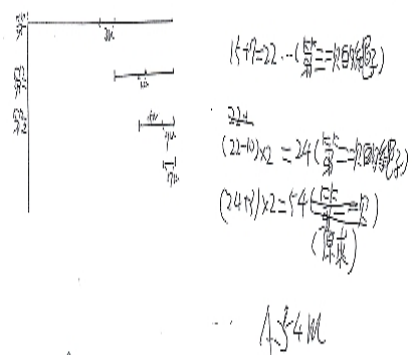
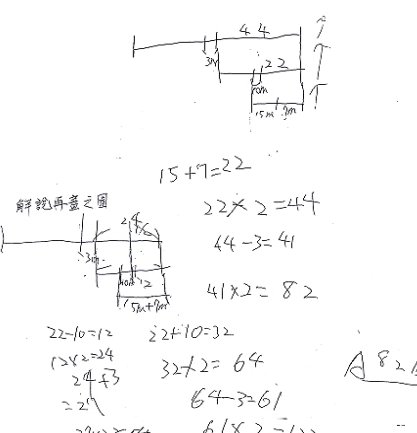
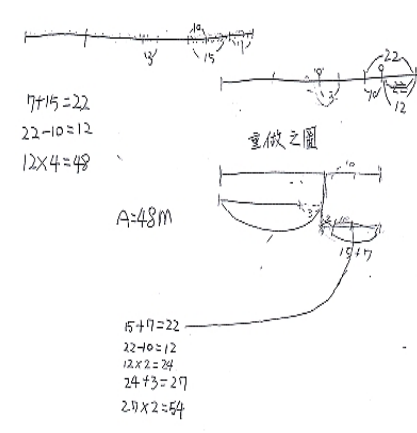
<u>繪智高</u> (S34)  $(15+10) \times 2 = 24$ $(24+3) \times 2 = 54$ $A = 54m$	<u>繪智強</u> (S59)  $15+7=22$ $(22-10) \times 2 = 24$ $(24+3) \times 2 = 54$ $A = 54m$
<u>繪智平</u> (S23)  $15+7=22$ $22 \times 2 = 44$ $44-3=41$ $41 \times 2 = 82$ $A = 82m$	<u>繪智梅</u> (S83)  $15+7=22$ $22-10=12$ $12 \times 4 = 48$ $A = 48m$

圖 1 第一題個案解題原案

研究者發現繪智平一開始就畫圖，且圖畫表徵與繪智高 (S34) 相似，畫三條線分別表示三次用去情形（見圖 1），但解題卻未能成功，進一步瞭解其錯誤

原因。

I：你算完會檢查嗎？

S：我沒有這種習慣？

I：為什麼？

S：會浪費時間，而且平常算就要算對，就不用檢查。

I：你怎麼知道你是算對的？

S：只要算過去就好了。

繪智平認為有算出答案就不用浪費時間檢查。研究者告訴他現在不是考試，不趕時間，試著檢查看看，然而他表示學校老師及補習班老師雖偶而會提起檢查，但沒有說明檢查的方法。他認為檢查就是重頭再算一次，於是重讀題目，並看一下圖，發現前面的做法漏掉第一次用去剩下的一半少 10 公尺之 10 公尺部份，於是喃喃自語地表示「一半少 10 公尺（遲疑一下），是加還是減？我想想看（停頓 2 秒），應該是加」，後來寫下算式【 $22 + 10 = 32, 32 \times 2 = 64, 64 - 3 = 61, 61 \times 2 = 122$ 】。

研究者發現該生在思考一半少 10 公尺應如何計算時，並沒有對照所畫之圖思考，而是在腦海分析，此想法也得到他的證實，故研究者建議繪智平對照著圖做做看，後來由圖一步一步觀察及運算，繪智平頓悟之前的錯誤。

研究者認為繪智平（S23）解題失敗的原因主要解題過程沒有運配合用圖思考，畫圖只是瞭解題目意思及找出解題的程序，但在解題過程中並沒有利用圖或對照圖分析思考，純粹用語言推理分析，而逆推時受關鍵字『多』『少』干擾，所以無法正確解題。

另一個解題失敗者繪智梅（S83）是畫一條線表示三次用去情形（見圖 1）。

I：請告訴我你第一題的做法。

S：我是從後面往前推，剩下 7 公尺和第三次用的 15 公尺加起來 22 公尺，我看圖 22 是剩下的一半多 10，所以 22 減 10 就是 12 這一段（指著圖），這一段是它（全長）的四分之一，所以就乘以 4，得到 48。

I：（指著圖）這一段為什麼是它的四分之一？

S：（指著圖）因為一開始用它的一半，後又用它的一半到這一邊（12 公尺長的位置），所以就這樣。

研究者發現繪智梅按照題目意思，一條繩子就畫一條線，然後依序畫出三次用去情形，其圖是符合題目敘述的，但把三個層次之「部分-整體」關係表徵在

同一線段，使這些關係看起來更複雜，導致她推論分析錯誤，所以解題失敗。此種情形也出現在筆試時，雖然繪智梅知道逆推回去求解，但其圖畫表徵並不恰當。故研究者建議她用不一樣的圖畫表徵問題，但繪智梅不太瞭解研究者的意思，所以研究者提示將三次用去的情形分開畫，不一定只畫一條線，於是繪智梅重畫三條線，依序表示第一次、第二次、第三次用去情形（見圖 1 重做之圖），依此圖再次解題。研究者發現她改變了圖畫表徵內容就解題成功了。後來她也告訴研究者，把各次用去情形分開畫的圖比較清楚，也比較不會亂掉，像之前所畫的圖就讓她沒注意第一次多 3 公尺。

因此繪智梅（S83）這題解題失敗的原因主要在圖畫表徵的問題，她的圖畫表徵雖正確但不恰當，使其遺漏了關鍵訊息（第一次多 3 公尺），造成分析錯誤而解題失敗。

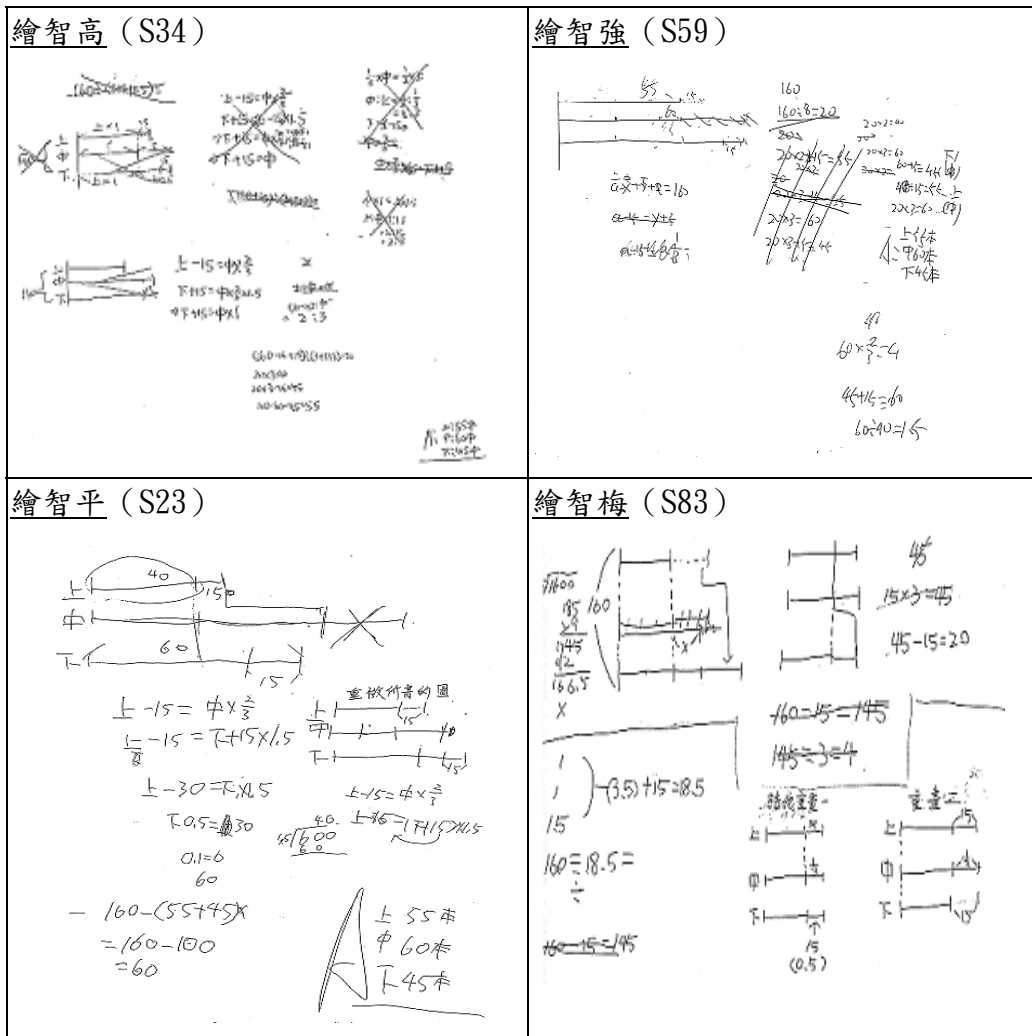
二、第二題書架問題

題目：一個書架分為上、中、下三層，總共放有 160 本書。圖書館義工從上層移動 15 本到下層，且將中層 $\frac{1}{3}$ 的書淘汰拿掉，結果上層與中層的書本數相同，而下層的書本數是上層的 1.5 倍，請問原來上、中、下三層各有幾本書？（上 55 本、中 60 本、下 45 本）

繪智強（S59）、繪智平（S23）、繪智梅（S83）三人，看完題目後下筆就先畫圖表徵問題（見圖 2）；繪智高（S34）開始直接列算式，但算不出，所以改用畫圖方法。結果繪智高（S34）、繪智強（S59）二人解題成功；繪智平（S23）、繪智梅（S83）二人解題失敗。

在此題研究者發現個案畫圖的方法不太一樣，繪智高（S34）、繪智強（S59）表示「畫圖是爲了瞭解各層書量有幾等分與差的關係，所以圖要盡量畫得標準，否則容易誤導；故畫圖時，先把題目看完，再把一等份的地方畫出來，慢慢畫其他等分的地方。」而繪智強（S59）說「畫這個圖，如果照題目順序畫很麻煩，關係太複雜的時候，若先畫原來的上層再移走 15，接著畫會比較不準，所以先從下面往上看，1.5 倍就是 3 倍，然後畫中層 $\frac{2}{3}$ 是 2 倍，上層也一樣，然後多畫虛線代表移給下層 15 本，然後中層加 1 倍，就是拿掉的 $\frac{1}{3}$ 。」研究者認為他們會注意畫圖的方法，且重視圖示的關係比例，因此其圖能呈現解題關鍵，這對解題是有相當助益的。相對地，繪智平（S23）說「畫圖的方法是照題目的敘述一句一句直接畫出」，因此他只畫出各層書量改變情形，卻無法顧及各層之間的數量

關係。繪智梅 (S83) 亦表示畫圖是想找出各層書量的倍數關係，不過她所畫的三條線段等長，她告訴研究者「上層與中層的書量原來是一樣的」，因此畫圖表徵問題時，將三層畫得等長；也就是說繪智梅 (S83) 在圖畫表徵前，已經對問題添加了自己的詮釋。



關係就不符合題目條件，故無法產生算式解題。後來雖然改用代數式解法，但其運算概念不正確，因此不算解題成功。

繪智梅（S83）解題失敗的原因主要在圖畫表徵前，已經對問題添加了自己的詮釋，因此畫出代表上、中、下三層的線段等長；也因一開始的想法不對，所以利用圖思考解題程序時不能有正確的推論分析，雖然知道要找出各層書量的倍數關係，但思考目標專注於各層改變情形的線段標示，使得解題失敗。經研究者的提示，由各線段的前段來思考各層倍數關係，就發現之前所做的假設想法錯誤。

三、綜合討論

由四個個案解決 2 個數學問題的過程分析，發現學生解題過程及策略的運用是非常不同的，故解題表現也有很大的差異。接著以三個解題階段來說明他們解題過程的差異：

（一）在表徵問題階段

四個個案，繪智高（S34）、繪智強（S59）、繪智平（S23）、繪智梅（S83）常用圖畫表徵問題，在進行解題，他們雖然利用同一表徵型式—圖畫，但其表徵內容是不一樣的。解題成功的學生，像繪智高（S34）、繪智強（S59）在畫圖之前能整合問題訊息，所畫的圖能呈現解題關鍵與線索，故圖畫表徵的恰當性與正確性均優於解題失敗者；解題失敗的學生，像繪智平（S23）其圖畫表徵內容有些不符合題目訊息其比例關係不對，所以不能從圖中獲得有益解題的線索；而繪智梅（S83）的圖畫表徵內容不恰當，她對於有「部分-整體」關係的問題，習慣以一條線表徵所有不同的關係，使其無法正確的分析推理，還有畫圖前對問題已有不對的詮釋，因此其圖畫表徵內容不利於解題。

圖畫表徵的正確性和學生形成圖畫表徵的方法有關，解題成功的學生繪智高（S34）、繪智強（S59）知道如何畫才能使圖清楚明確，他們先畫出各量關係的等分及基準部分，能使各關係表徵有連貫與一致性，故所產生的圖畫表徵內容較能完全符合題目陳述且比例正確；解題失敗的學生如繪智平（S23）大都直接轉譯問題的各句陳述，因此圖畫表徵不能連貫所有的條件，因此圖畫表徵不易呈現解題關鍵。

故在此階段可發現，不同解題正確率學生在圖畫表徵的形成與圖畫表徵的內容是有差異的。

（二）在解決問題階段

解題成功的學生，像繪智高（S34）、繪智強（S59）會用所產生的圖畫表徵思考解題程序，對圖做細微的觀察，發現可解答的線索，並配合著圖，確定計算進度及所算是否正確；但解題失敗的學生如繪智平（S23）只是畫圖瞭解題意，雖然其圖畫表徵正確，不過在解決問題時沒有利用圖對照運算，且語言推理分析受其他因素干擾，以致於不能正確解題。

故在此階段可發現，不同解題正確率學生對於圖畫表徵的運用是有差異的。

（三）在評估解答階段

解題成功的學生像，繪智強（S59），做完題目一定會驗算其答是否符合題目的各條件；解題失敗的學生，如繪智平（S23）、繪智梅（S83），他們雖然完成解題，不過都沒有回顧檢驗其答案，有的還有正確的圖畫表徵，像繪智平（S23）的繩子問題的圖與繪智高（S34）、繪智強（S59）相似，但其答案錯誤全然沒有察覺。繪智平（S23）、繪智梅（S83）說沒有習慣也沒有必要檢查，繪智平（S23）更表示老師沒有說檢查的方法，所以他不知如何檢驗，由此顯示解題失敗的學生解題過程比較缺乏最後的評估與反省的步驟。

故在此階段可發現，不同解題正確率學生在評估解答方面是有差異的。

伍、研究結論與建議

本研究主要透過參加 2003 年亞太區小學數學奧林匹亞競賽台灣區初賽錄取學生（120 名）中選取 4 名學生進行半結構性晤談，旨在探討國小數學資優生運用畫圖策略解題但不同解題正確率者的解題過程差異。本節茲將研究的主要發現歸納成結論，並依據研究結果提出建議。

一、結論

國小數學資優生解題運用不同的解題策略，因而有不同的解題表現，但用同一種解題策略也有不同的解題表現。四個個案筆試 5 題都用了畫圖策略，但他們的解題表現差異很大，有的人解題正確 5 題，有的人只答對 1 題，他們解題過程畫圖策略運用是否有差異？答案是肯定的。經由個別訪談資料分析，結果發現運用畫圖策略之高、低正確率者的解題過程差異可分為四個方面來說：（一）圖畫表徵的內容差異（二）圖畫表徵的形成差異（三）圖畫表徵的運用差異（四）評估解答的差異。

（一）圖畫表徵的內容差異

學生透過圖畫表徵協助解題思考，其先決條件是圖畫表徵正確且適當，才能發揮輔助功用，反之，錯誤及不當的圖畫表徵則無助於觀察推理。

本研究發現高、低解題正確率學生的圖畫表徵的內容是有差異的，高解題正確率的學生如繪智高（S34）、繪智強（S59）兩人所畫的圖之內容較為正確且恰當，他們根據問題的條件敘述畫出合乎比例關係的線段圖，並且清楚的標示數據數量關係，由圖畫表徵即可看到解題的關鍵，因此常能解題成功。而低解題正確率的學生如繪智平（S23）其圖畫表徵常常不合乎比例、有時標示不清，因此無法從圖中找到解題的線索，所以常畫了圖就沒有任何計算紀錄。繪智梅（S83）則是圖畫表徵不恰當及不正確，尤其處理有部分-整體關係之問題時，繪智梅習慣以一條線段來表徵這些關係，這樣的圖畫表徵使各數量關係看起來更複雜，且容易遺漏了關鍵訊息；另外在集合問題時以一條線段表徵四種可能情形並不明確，這些不當表徵造成解題失敗。

（二）圖畫表徵的形成差異

圖畫表徵的正確性與學生如何形成產生圖畫表徵有關，且如何形成問題的表徵也是解題過程很重要的步驟。Mayer(1987；林清山譯，民 79)認為問題表徵包含問題轉譯與問題整合兩個步驟，如果解題者只是針對問題陳述一個句子一個句子的轉譯，沒有整合這些訊息形成連貫一致的表徵，容易導致解題失敗。

本研究發現高、低解題正確率學生形成圖畫表徵的過程及方法是有差異的。高解題正確率的學生如繪智高（S34）表示畫圖的方法是「先把題目看完，再把一等份的地方畫出來，慢慢畫其他等分的地方」，繪智強（S59）表示「有些題日照題目敘述依序畫，但有些題目關係複雜照題目順序畫很麻煩」。兩人在產生圖畫表徵前，會掌握圖畫重點，確認各數量間的等分及相差關係，並找出比較容易畫的方法，先畫一個基準量，依此量再畫出其餘各數量長度，因此其圖畫比較清楚且大小長度比例準確；也就是說高解題正確率者，在形成圖畫表徵時，不是直接轉譯題目陳述，他們會先整合相關條件，確定找出各數量的倍數或等分關係，因此畫圖時會對照之前所畫，使整個圖有連貫性及一致性。

低解題正確率學生表示畫圖時直接轉譯問題的訊息即可，如繪智平（S23）是按照題目之所說一句一句的轉譯，所以畫完後，有些線段比例關係就不符合題目條件，也就是說單獨看各線段是合乎題目敘述，但如果把各關係整合起來，部分圖畫內容是不符合題目條件，所以繪智平（S23）表示其圖看不出連貫性；而繪智梅（S83）是讀完題目後，對問題添加自己的詮釋，因此其圖畫表徵有題目

中沒有之敘述與不正確的數量關係。故低解題正確率者不當詮釋問題及直接轉譯問題的方法，致使其圖畫表徵不正確。

（三）圖畫表徵的運用差異

本研究發現運用圖畫表徵策略高、低解題正確率學生，不僅在圖畫表徵的內容與形成圖畫表徵的方法有差異，在問題解決階段，對圖畫表徵的運用也有差異。高解題正確率學生除了藉由圖畫瞭解題目的意思或找出解題的關鍵外，在運算過程會配合圖，確定計算進度及檢驗所算是否正確，也就是說高解題正確率學生不僅利用圖理解題意，分析解題程序，且運算時配合圖思考，並能應用圖監控解題運作。

但低解題正確率學生對於圖的利用不如高解題正確率學生，像繪智平（S23）在解決繩子問題時其圖畫表徵與繪智高（S34）、繪智強（S59）相似，該生正確且恰當地表徵題意且呈現解題線索，但仍解題失敗，因為他在解題過程中並沒有利用圖或對照圖分析思考，純粹用語言推理分析。後來研究者建議該生對照圖再解題一次，就能成功解題。

（四）評估解答的差異

許多解題研究（楊瑞智，民 83；劉貞宜，民 89；謝淡宜，民 88）發現學生不會回顧及評估解答的正確性與合理性，尤其低解題能力者。在本研究亦發現運用圖畫表徵策略高、低解題正確率學生在評估解答階段是有差異的。高解題正確率學生求出答案後會將答案帶回題目或配合圖檢驗，有的還不只驗算一次，如繪智強（S59）；但低解題正確率學生完成解題後，都沒有回顧檢驗其答案的動作，雖然他們的圖畫表徵正確，但算出答案錯誤全然沒有察覺，他們表示沒有習慣也沒有必要檢查，有的還不知如何檢驗。

二、建議

根據本研究的結論，提出一些建議，提供教師數學解題教學及未來研究之參考。

（一）對國小數學畫圖策略解題教學的建議

研究者過去有這樣的經驗，當學生數學解題碰到困難時，建議他們用畫圖策略試試看，有的學生透過畫圖解決其困難，但有的學生仍無法成功解題，甚至不知如何畫圖，因此無法得到協助。本研究發現不知如何畫圖的學生是因為沒有學習經驗，且運用畫圖解題的成效，還要端視學生如何畫圖及圖畫表徵的內容，與如何運用圖示，因此研究建議教師讓學生有畫圖解題的經驗與學習，而進行畫圖

策略解題訓練時應包含三個重點：

1.確認適當的圖畫表徵

學生以畫圖策略協助解題，不管是應用於理解問題或擬定解題計畫，都要產生正確與適切的圖畫表徵才有助於解題，故教師教學時有必要讓學生先確認何種圖畫表徵較恰當，是畫線段圖或集合圖，還是平面圖或立體圖，甚至以線段圖為例，還可更深入分析一條線或多條線表徵何者為佳。另外每一個學生對圖像的理解不同，因此教師進行圖畫表徵策略解題教學，應利用多樣化的圖畫表徵型式，以增進學生對圖像的理解與運用。

2.形成圖畫表徵的技巧指導

圖畫表徵的正確性影響解題，而解題者如何形成圖畫表徵則關係其圖畫表徵的正確與否。本研究發現解題成功者的畫圖方法是不同於解題失敗者，成功者不只是按照題目訊息表徵，會先確定題目中各數量關係的基準及等份關係，並照基準依序畫出各量，還有會判斷從結果先畫或從開始情況來表徵；有的問題如果直接轉譯題目敘述，通常較不易畫出符合各種數量關係的圖。因此如何畫出正確且可呈現解題關鍵的圖是需要指導的。

3.圖畫表徵的運用指導

畫圖不只是瞭解題意，如何運用圖畫表徵在整個解題階段，教師應明確說明，例如學生怎樣觀察圖畫表徵發現解題關鍵，或者運算過程經常對照圖監控解題程序，以及利用圖檢驗答案的正確性等，使圖畫表徵發揮解題輔助效能。誠如蕭見文（民 85）在文章中提到有效的策略教學通常是奠基於述說清楚的訓練。故教師指導學生用畫圖方法解題時，應明確具體的示範或討論分析。

（二）未來研究的建議

對於本研究之不足之處，提供給未來對此主題有興趣的研究者一些參考意見。

1.研究對象方面

本研究之對象是針對參加2003年亞太區小學數學奧林匹亞競賽台灣區初賽錄取學生，限於研究者個人的能力與時間，僅能做初步的調查研究，及對少數學生進行較為深入的訪談，研究結果無法做大範圍的推廣。故建議後續的研究可增加晤談人數，使研究結果更具代表性；亦可擴大研究對象，例如增加一般生，可與資優生互相對照兩者在解題策略運用的情形與差異，使研究更具普遍性，也增加研究廣度。

2.研究內容方面

本研究發現學生所產生的圖畫表徵是不同的，也有不同的解題成效；這顯示學生畫圖表徵問題有個別差異存在。為什麼同一個問題學生會有不同的圖畫表徵，問題的圖畫表徵與學生的語文理解能力或學習經驗有關嗎？或受到什麼因素影響？是值得後續研究進一步探討。

3.研究方法方面

本研究採用「一對一半結構性晤談」的方式探究學生的解題策略的運用，事前雖擬定了晤談大綱，也進行晤談前練習，但在整理分析晤談資料時仍有一些不足和不夠詳盡之處，尤其針對不善表達學生如何引導說明其想法，及如何發問使受訪者明瞭訪談者意思，及避免誘導及暗示受訪者的回答等，都是訪談者須特別注意之處。因此後續研究若採用晤談方法時，晤談前的計劃與練習是訪談者須周詳規劃與推演的重點，如此資料的獲得才不會有遺珠之憾。

參考文獻

- 王正信（民91）。**國小學童數學解題及整合認知能力之縱貫研究**。台中師範學院數學教育系碩士論文。
- 吳武典（民 88）。資優教育全方位發展策略的整合型研究。中華資優教育學會主編，**資優教育全方位發展**（頁 1-5）。台北：心理出版社。
- 吳昭容（民 79）。**圖示對國小學童解數學應用題之影響**。國立台灣大學心理學研究所獨立研究。
- 何縉琪、林清山（民 83）。表徵策略教學對提升國小低解題正確率學生解題表現之效果研究。**教育心理學報**，27，259-279。
- 周筱亭（民 83）。**國民小學數學科新課程概說**。台北：台灣省國民教師研習會。
- 林香（民 92）。**國小數學資優生的解題策略探究—以圖畫表徵策略為例**。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文。
- 林淑菁（民 92）。**國小資源班學生正整數乘除文字題之圖示教學效果研究-以台北市一國小為例**。國立台北師範學院特殊教育學系碩士論文。
- 林碧珍(民 78)。**國小學生數學解題的表現及其相關因素的研究**。台北市國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文。
- 紀惠英（民 80）。**國小六年級學生數學應用問題表徵類型與同構性之研究**。國立台灣師範大學特殊教育研究所碩士論文。
- 邱佳寧（民 90）。**國小數學學習障礙學生解題策略之研究**。彰化師範大學特殊教育研究所碩士論文碩士論文。
- 徐文鈺（民 81）。**圖示策略訓練課程對國小五年級學生的數學應用題解題能力與錯誤類型**

- 之影響。國立台灣師範大學教育心理與輔導研究所碩士論文。
- 涂金堂（民 84）。國小學生後設認知、數學焦慮與數學解題表現之相關研究。國立高雄師範大學教育學系碩士論文。
- 教育部（民 82）。國民小學課程標準。台北：作者。
- 教育部（民 89）。基本能力實踐策略專題研究報告（第三章，第十一節：獨立思考與解決問題）。台北市：作者。
- 教育部（民 90）。九年一貫課程暫行綱要數學學習領域。台北：作者。
- 教育部（民 91）。創造力教育白皮書。台北：作者。
- 陳其英（民 88）。國一數學資優生問題同構轉化能力及外在表徵對解題影響之研究。國立臺灣師範大學科學教育研究所碩士論文。
- 陳明媚（民 91）。國小聽覺障礙學生數學文字題解題歷程之研究。國立臺灣師範大學/特殊教育研究所碩士論文。
- 楊明家（民 86）。國小六年級不同解題能力學生在數學解題歷程後設認知行為之比較研究。屏東師範學院國民教育研究所碩士論文。
- 楊淑芳（民 90）。國小資源班學生使用圖示策略解決比較類加減應用題之成效研究。國立台北師範學院特殊教育學系碩士班碩士論文。
- 楊瑞智（民 83）。國小五、六年級不同能力學童數學解題的思考過程。國立台灣師範大學科學教育研究所博士論文。
- 劉貞宜（民 89）。數學資優生的解題歷程分析。國立台灣師範大學特殊教育研究所碩士論文。
- 蕭見文（民 85）。數學解題策略教學之研究。教育學刊，12，367-399。
- 謝淡宜（民 88）。小學四年級數學資優生和普通生數學解題思考歷程之比較。台南師院學報，32，297-367。
- 鍾政廷（民 91）。國小數學解題歷程及後設認知之研究。臺中師範學院教育測驗統計研究所碩士論文。
- 魏君芝（民 92）。國小五年級數學低成就學生圖示策略教學成效之研究。臺中師範學院國民教育研究所碩士論文。
- 羅素貞（民 85）。問題表徵與問題解決。屏東師院學報，9，149-176。
- Krutetskii 著（民 82）。中小學生數學能力心理學（九章出版社編輯部譯）。台北：九章出版社。（原作 1976 年出版）。
- Mayer, R. E. 著（民 79）。教育心理學－認知取向（林清山譯）。台北：遠流。（原作 1987 年出版）。
- Campbell, K. J., Collis, K., & Watson, J. (1995). Visual processing during mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 28(2), 177-94.
- Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91(4), 684-689.
- Hegarty, M., Mayer, R. E., & Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problem:

- a comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology*, 87(1), 18-32.
- Lowrie, T. (2000). A case of an individual's reluctance to visualize. *Focus on Learning Problem in Mathematics*, 23(1), 17-26.
- Lowrie, T., & Clements, M. A. (2001). Visual and nonvisual processes in grade 6 students' mathematical problem solving. *Journal of Research in Childhood Education*, 16(1), 77-93.
- Lowrie, T., & Kay, R. (2001). Relationship between visual and nonvisual solution methods and difficulty in elementary mathematics. *The Journal of Educational Research*, 94(4), 248-255.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

A Study on Mathematically Gifted Elementary Students' "Drawing a Diagram" Strategies Using in Solving Problems

Hsiang Lin & Ing-jye Chang*

ABSTRACT

The purposes of the study are to understand the "drawing a diagram" strategies of mathematically gifted elementary students in solving problems, as well as what kind of different process responded to their questions. This study focused on the exam of students who were elected from the Pre-semifinal of Taiwan Olympiad Math competition in 2003. They were trained to compete in the Asia Pacific Olympiad for Primary Schools. Four students chosen from the contestants were interviewed in the semi-structure way. The research results show that there were four differences from their problem-solving process: (1) the different contents of the diagrammatic representation, (2) the different forms of the diagrammatic representation strategy, (3) the different applications of the diagrammatic representation, and (4) the different evaluations of the answer for the problems.

Key words: Elementary school, mathematically gifted students, Mathematical problem-solving, "Drawing a diagram" strategy

* Hsiang Lin: Teacher, Siou Shan Elementary School, Taipei County

Ing-jye Chang: Associate Professor, Department of Mathematics and information Education,
National Taipei Teachers College